Graphentheorie I

Übungsblatt 12

1. Man zeige für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $R(k+1, \ell+1) \leq R(k, \ell+1) + R(k+1, \ell)$, und folgere anschließend induktiv, dass $R(k+1, \ell+1) \leq \binom{k+\ell}{k}$.

2⁺. Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $P \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jede Primzahl $p \geq P$ die Gleichung

$$x^n + y^n \equiv z^n \mod p$$

eine nicht–triviale Lösung besitzt, d.h. $x, y, z \not\equiv 0 \mod p$.

3⁻. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallsgraph aus $\mathcal{G}(n, p)$ genau m Kanten hat, für gegebenes m zwischen 0 und $\binom{n}{2}$?

4. Wie groß ist die erwartete Kantenanzahl der Graphen $G \in \mathcal{G}(n, p)$?

5. Es seien $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ zwei Grapheneigenschaften, und $p \colon \mathbb{N} \to (0, 1)$ so dass fast alle Graphen in $\mathcal{G}(n, p(n))$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_1$ haben und fast alle Graphen in $\mathcal{G}(n, p(n))$ die Eigenschaft $\mathcal{P}_2$ haben. Zeigen Sie, dass fast alle Graphen in $\mathcal{G}(n, p(n))$ beide Eigenschaften gleichzeitig, also die Eigenschaft $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, haben.

Die folgende Aufgabe ist schriftlich (alleine, in Zweier- oder Dreiergruppen) vor Beginn der Vorlesung am 2. Juli abzugeben:

6. Wie groß ist für $r \in \mathbb{N}$ die erwartete Anzahl von K^r–Untergraphen in $G \in \mathcal{G}(n, p)$?

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 2. Juli, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

7. Eine *arithmetische Progression* der Länge k (kurz: k-AP) in den natürlichen Zahlen ist eine Zahlenfolge der Form $a, a+d, a+2d, a+3d \ldots\ a+kd$ mit $a, d \in \mathbb{N}$. Der Satz von van der Waerden, ein berühmter Satz in der Ramsey Theory, besagt:

> *Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Zahl $W(k) \in \mathbb{N}$, so dass jede Zweifärbung von $\{1, 2, 3, \ldots, W(k)\}$ eine einfarbige k-AP enthält.*

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

(i) Ist es wahr, dass jede Zweifärbung von $\mathbb{N}$ auch immer eine arithmetische Progession unendlicher Länge enthalten muss?

(ii) Zeigen Sie, dass $W(k) \geq 2^{k/2}$.

Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Hinweise

1. Was kann man jeweils über die Größe der blauen bzw roten Nachbarschaft einer beliebigen Ecke sagen?

2. Es sei $G := \{\, x^n \mid x \in \mathbb{Z}/p\}$. Betrachten Sie $(\mathbb{Z}/p)^*/G$ als multiplikative Gruppe und erinnern Sie sich daran, dass $(\mathbb{Z}/p)^*/G$ eigentlich eine Partition von $(\mathbb{Z}/p)^*$ ist. Nun geht es weniger um Algebra als darum, das richtige Ramsey–Resultat zu benutzten.

5. Siehe D9.3 (E11.3) für die Definition von "fast alle", falls am Dienstag noch nicht in der Vorlesung behandelt.

6. Betrachten Sie geeignete charakteristische Zufallsgrößen.