Fachbereich Mathematik,
Universität Hamburg
SoSe 19

Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 11

1. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit n Ecken und mindestens $ex(n, K_3) + 1$ Kanten mindestens $\lfloor n/2 \rfloor$ viele Dreiecke enthält.

2⁻. Zeigen Sie, dass es zu jeder reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unendliche monotone Teilfolge gibt.

3. Zeigen Sie, zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jede Partition von $\{1, \ldots, n\}$ in k Teilmengen in mindestens einer dieser Teilmengen Zahlen x, y, z mit $x + y = z$ existieren.

4. Zeigen Sie, dass es zu jeder 2–Kanten-Färbung[1] der Kanten eines K_n einfarbige Wege P_1 und P_2 gibt mit $V(K_n) = V(P_1) \cup V(P_2)$.

5. Zeigen Sie, dass $R(C^4, C^4) = 6$ gilt.

6. In der Vorlesung wurde der folgende Satz von Erdős und Szekeres bewiesen: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass aus n Punkten der Ebene, von denen keine drei kollinear sind, stets k Punkte auswählbar sind, die ein konvexes Polygon aufspannen (d.h. von denen keiner in der konvexen Hülle der übrigen liegt). Skizzieren Sie einen weiteren Beweis.

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 25. Juni, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

7. Zeigen Sie, dass $R(K^3, K^4) = 9$ gilt.

[1] In diesem Zusammenhang ist eine Kanten-Färbung einfach eine Abbildung $E(G) \to \{1, 2\}$.

Hinweise

1. Wie kann man mit einem Dreieck uvw, und Ecken von $G - uvw$ weitere Dreiecke konstruieren?

3. Zu gegebener Partition von $\{1, \ldots, n\}$ in k Teilmengen definiere eine geeignete k-Färbung der Kanten des K^n.

5. Berechnen Sie zunächst $R(3)$.

6. Verwende den Satz, dass $n \geq 4$ Punkte genau dann ein konvexes Polygon aufspannen, wenn je vier von ihnen es tun.

7. Für $R(K^3, K^4) \geq 8$ versuche, ein Beispiel zu finden, was von der Struktur ähnlich zum Beispiel $R(3) \geq 5$ aus der Vorlesung ist.