Fachbereich Mathematik,
Universität Hamburg
SoSe 19

Dozent: Dr. Max Pitz
Tutoren: Carl Bürger,
Ruben Melcher

Graphentheorie I

Übungsblatt 10

1. An welcher Stelle war es im Beweis vom *max-flow min-cut theorem* relevant, dass wir nur $\mathbb{N}$-wertige Kapazitätenfunktionen betrachten? Bleibt die Aussage vom *max-flow min-cut theorem* eventuell trotzdem wahr, wenn wir beliebige $\mathbb{Q}_{\geq 0}$-wertige Kapazitätenfunktionen zulassen?

2. Leiten Sie aus dem *max-flow min-cut theorem* den Satz von Menger (D2.3.5, E3.3.5) her. (Tipp: Die Kantenversion ist einfach. Simulieren Sie die Eckenversion durch Anwendung der Kantenversion auf einen geeigneten Hilfgraphen.)

3$^-$. (i) Führen Sie die Hadwiger-Vermutung für r auf die Hadwiger-Vermutung für $r+1$ zurück. (ii) Leiten Sie den Vierfarbensatz aus der Hadwiger-Vermutung für $r = 5$ her.

4$^+$. Beweisen Sie die Hadwiger-Vermutung für Kantengraphen.

5. Die Definition von $ex(n, H)$ wird spätestens in der Freitagsvorlesung besprochen. Sollten Sie diese Aufgabe trotzdem schon vorher bearbeiten wollen genügt es die Definition von $ex(n, H)$ verstanden zu haben.

(i) Bestimmen Sie $ex(n, K_{1,3})$. Finden Sie eine möglichst genaue Beschreibung der extremalen Graphen ohne $K_{1,3}$.

(ii) Bestimmen Sie $ex(n, 2K_2)$. Finden Sie eine möglichst genaue Beschreibung der extremalen Graphen ohne $2K_2$.[1]

Die folgende Aufgabe ist schriftlich (alleine, in Zweier- oder Dreiergruppen) vor Beginn der Vorlesung am 18. Juni abzugeben:

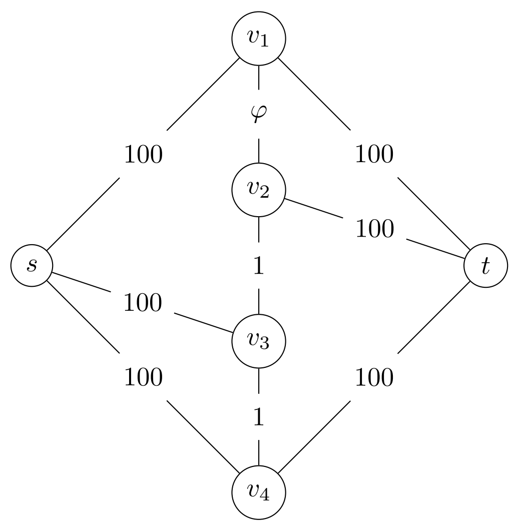
6. Zeigen Sie, dass jeder wie in Proposition D6.3.1 (E7.3.1) konstruierte Graph keinen K^4-Minor enthält.

[1] Hier meint $2K_2$ einfach zwei unabhängige Kanten.

Die folgende optionale Aufgabe wird im Proseminar am 18. Juni, 8.30-10 Uhr, Geom 432, besprochen. Wer die Aufgabe bearbeitet hat und an der Lösung interessiert ist, ist herzlich eingeladen das Proseminar zu besuchen.

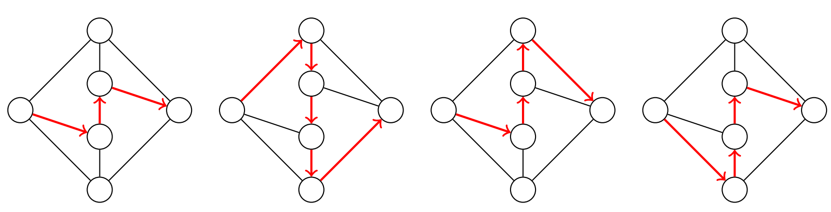
7. In dieser Aufgabe geht es darum zu sehen, dass unsere Beweismethode für das *max-flow min-cut theorem* bei $\mathbb{R}_{\geq 0}$-wertigen Kapazitätenfunktionen scheitern kann.

Es sei $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.6$ eine Lösung von $\varphi^2 = 1 - \varphi$. Wir betrachten das folgende Netzwerk (G, s, t, c) mit den eingezeichneten Kapazitäten (wobei die Kapazitätsfunktion c symmetrisch sein soll, d.h. $c(\vec{e}) = c(\overleftarrow{e})$ für jede Kante $e \in E(G)$).



(i) Was ist die maximale Flussstärke eines $s - t$-Flusses?

(ii) Betrachte die folgenden Wege W^*, W_1, W_2, W_3.



Wir beginnen mit dem Nullfluss $f_0 \equiv 0$. Man zeige, dass

$$W^*, (W_1, W_2, W_1, W_3)^\infty$$

eine nicht-abbrechende Folge nicht-ausgelasteter gerichteter $s \to t$ Wege definiert, sodass die zugehörigen Flussstärken $0 = |f_0| < |f_1| < |f_2| < \cdots$ nicht gegen das Maximum aus (i) konvergieren.

Hinweise

2. Für die Kantenversion definieren Sie die Kantenkapazitäten so, dass ein Fluss größtmöglicher Stärke es erlaubt, induktiv mit Korollar D5.2.3 (E6.2.3) genügend viele kantendisjunkte s–t Wege zu konstruieren. Für die Eckenversion spalten Sie jede Ecke x in zwei benachbarte Ecken x^-, x^+ auf, so dass der Fluss durch die neue Kante x^-x^+ die Benutzung von x durch einen Weg simuliert (Kanten xy von G werden durch Kanten x^-y^+ und x^+y^- simuliert).

Stellen Sie mit der Wahl der Kapazitäten sicher, dass ein s–t Weg im Hilfsgraphen stets die Ecke x^+ benutzt sobald er die Ecke x^- benutzt. Inwiefern ist dies hilfreich, wenn man in dem zugrundeliegenden Graphen kreuzungsfreie Wege finden möchte?

4. Führen Sie die Aussage auf kritisch r-chromatische Graphen zurück und verwenden Sie den Satz von Vizing.

7. Für (ii): Überzeugen Sie sich, dass die zusätzlichen ε-Kapazitäten der nicht-ausgelasteten $s \to t$ Wege die Stärken $1, \varphi, \varphi, \varphi^2, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^3, \ldots$ haben.