Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 13 (letzter Bogen): Übungen am 13. Juli 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

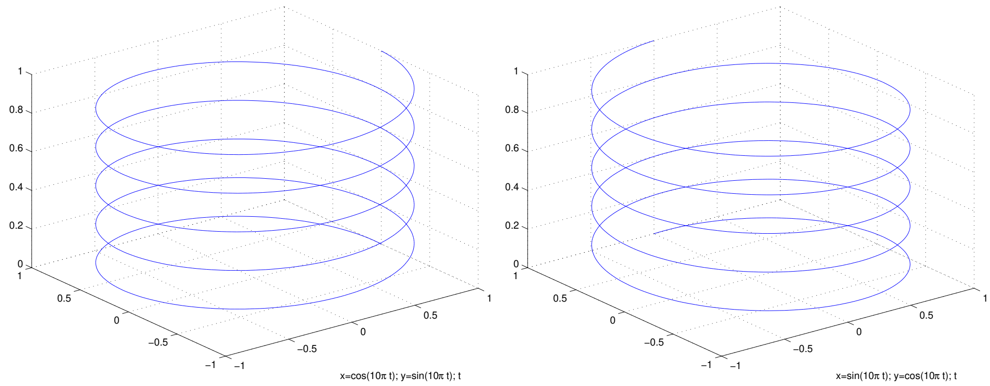
Aufgabe P37. Abgesehen von der technischen Realisierung kann man ausgehend von Kontrollpunkten $\mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, 1, \ldots, m$ den de Casteljau-Algorithmus verwenden.

Aufgabe P38.

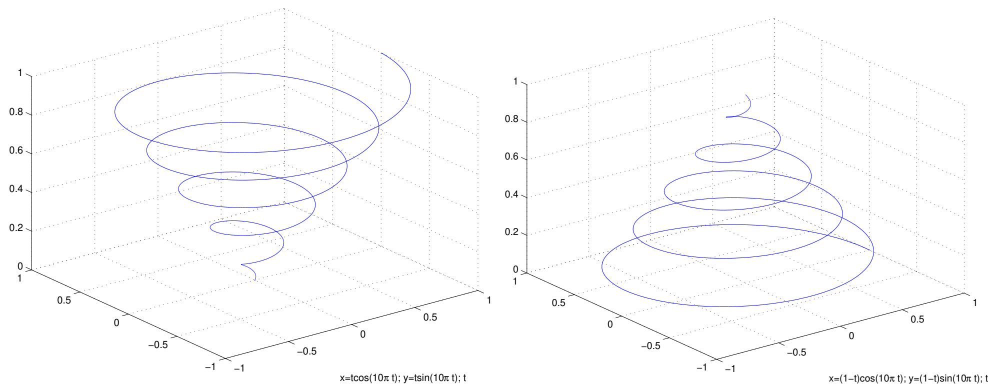
1a. Zylindrische Spiralfeder, weinwendig: $(\cos 10\pi t, \sin 10\pi t, t)$
1b. Zylindrische Spiralfeder, hopfenwendig: $(\sin 10\pi t, \cos 10\pi t, t)$
2. Spiralfeder: $(t \cos 10\pi t, t \sin 10\pi t, t)$
3. Spiralfeder anders herum: $((1-t)\cos 10\pi t, (1-t)\sin 10\pi t, t)$
4. Zylindrische Spiralfeder mit wachsender Ganghöhe: $(\cos 10\pi t, \sin 10\pi t, t^2)$
5. Zylindrische Spiralfeder mit schnell wachsender Ganghöhe: $(\cos 10\pi t, \sin 10\pi t, \exp(t^2))$

Einige dieser Raumkurven sind hinten (Abb. L13.1-L13.5) wiedergegeben.

Aufgabe P39. Ja! Man geht aus von über einem Gitter im $\mathbb{R}^2$ gegebenen Kontrollpunkten, und konstruiert Flächen in der Form von Tensorprodukten. Näheres bei Farin [1994, Kap. 16]*⁾. Flächen sind Abbildungen $[a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$. Das wesentliche ist der zweidimensionale Definitionsbereich.



Abbildungen L13.1-2 Zylindrische Spirale mit konstanter Ganghöhe, weinwendig und hopfenwendig



Abbildungen L13.3-4 Spiralen mit konstanter Ganghöhe, zu- und abnehmendem Radius

---

*⁾ loc. cit. Lösungshinweise, Blatt 12

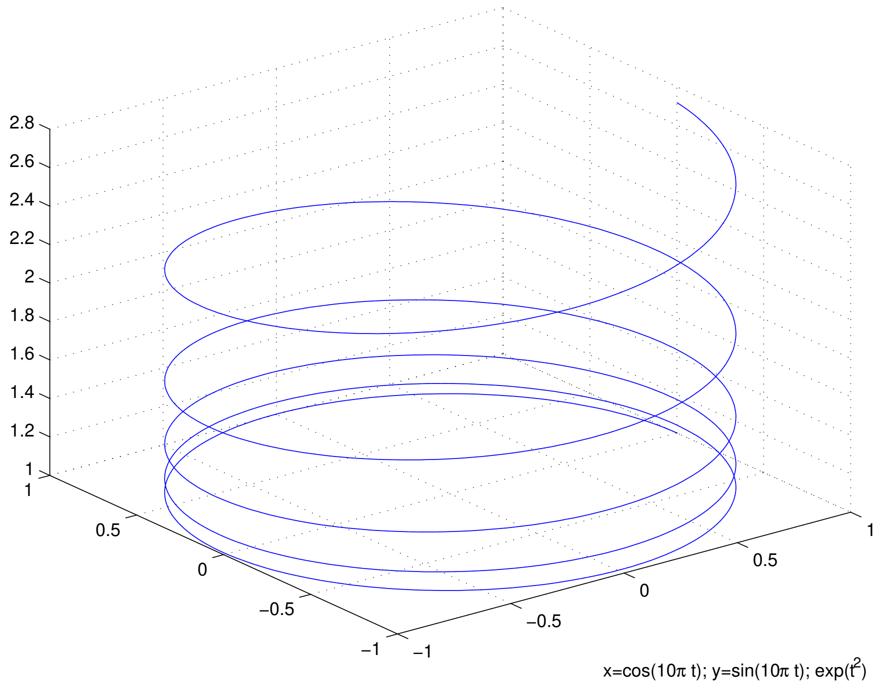


Abbildung L13.5 Zylindrische Spirale mit schnell wachsender Ganghöhe

Hausaufgaben:

Aufgabe 25. (Lösung von Stephan Köster) Es werden 37 Kontrollpunkte auf einer Ellipse mit Halbachsen $a = 0.6, b = 1$ berechnet, diese etwas verschoben gemäß

```
for y=19:1:37
  A(y,2)=A(y,2)+0.1;
end;
```

und für den *Schwung* die folgenden Punkte hinzugenommen:

```
A(s,:)=A(1,:);
A(s+1,:)=[-0.2,1.2];
A(s+2,:)=[-0.25,1.0];
A(s+3,:)=[-0.2,0.7];
A(s+4,:)=[0,0.5];
A(s+5,:)=[0.2,0.6];
A(s+6,:)=[0.4,0.7];
A(s+7,:)=[0.6,0.8];
```

Das Bild ist in Abb. L13.6 wiedergegeben.

Aufgabe 26. (Lösung von Reinhard Meier) (a) Hier wird die Bestapproximation nicht durch das Lösen von Gleichungen gefunden, sondern durch eine einfache Monotonieüberlegung. Es ist $\hat{r}(x) = \cosh(1) \approx 1.5431$ die Bestapproximation für f mit Minimalabweichung $\rho(f) = \sinh(1)$. $\hat{r}$ weicht an den Stellen 0, $1/2$ und 1 um diesen Betrag von f ab. Alle Funktionen der in der Aufgabe genannten Form sind in den Zusammenhangskomponenten des Definitionsbereiches monoton. Angenommen, es gäbe eine bessere Approximation $\tilde{r}$. Für diese müßte gelten:

$$\tilde{r}(0) > \cosh(1), \quad \tilde{r}(\frac{1}{2}) < \cosh(1), \quad \tilde{r}(1) > \cosh(1).$$

Diese Bedingungen lassen sich nicht mit der Monotonie von $\tilde{r}$ vereinbaren.

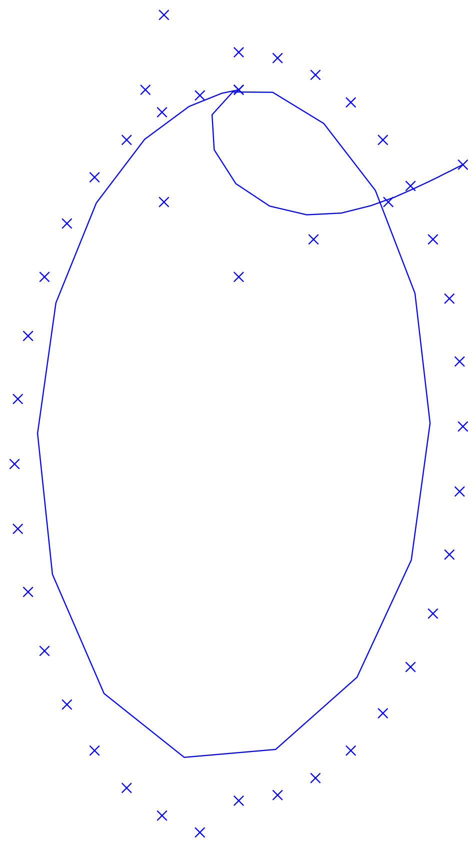


Abbildung L13.6. Der Buchstabe "O" als Beispiel für eine Bézier-Kurve

(b) Durch die Substitution $y = \cos 2\pi x$ geht das Problem über in die Frage nach der besten Approximation von e^y im Intervall $[-1, 1]$ durch Funktionen von der Form (a). Es wird sich zeigen, daß eine Alternante der Länge 4 gefunden werden kann, zu der die Intervallendpunkte gehören. Außerdem kann man davon ausgehen, daß für die Bestapproximation $c \neq 0$ gilt. Wir setze $c = 1$ und $B := b - ad$.

$$r(y) = \frac{ay + b}{cy + d} = a + \frac{B}{y + d}$$

Die sechs Gleichungen in den Unbekannten a, B, d, ξ_1, ξ_2 und μ lauten damit:

$$\begin{aligned}
e^{-1} - \frac{B}{-1 + d} - a &= -\mu, \\
e^{\xi_1} - \frac{B}{\xi_1 + d} - a &= \mu, \\
e^{\xi_2} - \frac{B}{\xi_2 + d} - a &= -\mu, \\
e - \frac{B}{1 + d} - a &= \mu, \\
e^{\xi_1} + \frac{B}{(\xi_1 + d)^2} &= 0, \\
e^{\xi_2} + \frac{B}{(\xi_2 + d)^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Durch Subtraktion können aus der ersten und aus der dritten Gleichung und aus der zweiten und der vierten Gleichung a und μ eliminiert werden. Die fünfte und sechste Gleichung können nach B aufgelöst werden. Das aus der fünften Gleichung gewonnene B wird in die Differenz der zweiten und vierten Gleichung eingesetzt, das aus der sechsten Gleichung gewonnene B wird in die Differenz der ersten und dritten Gleichung eingesetzt. Die sich aus der fünften und sechsten Gleichung ergebenden Ausdrücke für B werden gleichgesetzt. Auf diese Weise kann das Gleichungssystem auf drei Gleichungen in drei Unbekannten ξ_1, ξ_2 und d reduziert werden. Diese lauten, nach weiteren Umformungen, folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
e^{\xi_1}\big((\xi_1+d)^2-(\xi_1+d+1)(1+d)\big)+e(1+d)&=0,\\
e^{\xi_2}\big((\xi_2+d)^2-(\xi_2+d+1)(-1+d)\big)+e^{-1}(-1+d)&=0,\\
e^{\xi_1}(\xi_1+d)^2-e^{\xi_2}(\xi_2+d)^2&=0.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann bei Wahl von halbwegs vernünftigen Startwerten mit dem Newtonverfahren gelöst werden. Man erhält:

$$\begin{aligned}
a &= -1.176819908763661,\\
B &= -4.98844670747441,\\
b &= -2.312547015748724,\\
c &= 1.0,\\
d &= -2.273839583948678,\\
\xi_1 &= -0.22263278864644,\\
\xi_2 &= 0.69967439777669,\\
\mu &= 0.02096961927502883.
\end{aligned}$$

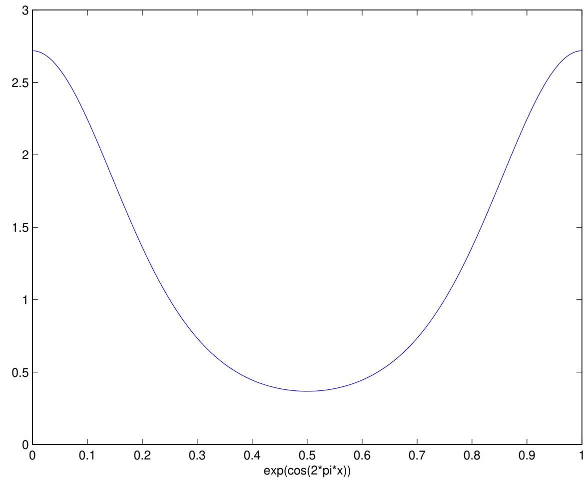
Diese Lösung ergibt tatsächlich die Bestapproximation, der entsprechende Satz ist der

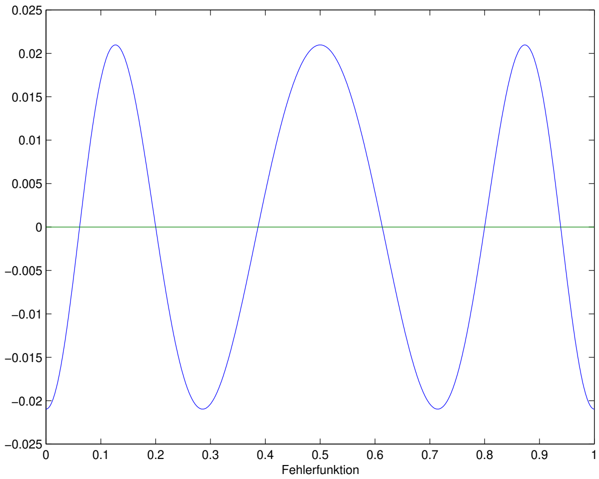
Zusatz zu Satz 9.2 (Geiger/Glashoff-Skript). *Besitzt $f-F(a)$ eine Alternante der Länge $d(a)+1$ und besitzt $F(a)-F(b)$ für jedes $b\in A$ mit $F(b)\neq F(a)$ in $[\alpha,\beta]$ höchstens $d(a)-1$ Nullstellen, so ist $F(a)$ beste Approximation von f bezüglich V.*

Bemerkung: Da die Alternante nach Verwendung der Substitution aus vier Punkten besteht, von denen zwei Intervallendpunkte sind, besteht die Alternante des ursprünglichen Problems sogar aus sieben (!) Punkten:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,\\
x_2 &= \frac{1}{2\pi}\arccos\xi_2,\\
x_3 &= \frac{1}{2\pi}\arccos\xi_1,\\
x_4 &= \frac{1}{2},\\
x_5 &= 1-\frac{1}{2\pi}\arccos\xi_1,\\
x_6 &= 1-\frac{1}{2\pi}\arccos\xi_2,\\
x_7 &= 1.
\end{aligned}$$

Die gegebene Funktion und die Fehlerfunktion (mit Alternante der Länge Sieben) sind in den Abbildungen L13.7 und L13.8 zu sehen. (c) Die gegebenen Funktion f ist symmetrisch zur Mitte, also $f(x)=f(1-x)$. Diese Eigenschaft überträgt sich auf die b. A.





Abbildungen L13.7 u. 8. Zu approxierende Funktion f und Fehlerfunktion $f-t$

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`