Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 11: Übungen am 29. Juni 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P31. Die wesentlichen Formeln stehen in (L10.2). Die Summen der Länge n werden in zwei Summen der Länge $n/2$ aufgespalten, diese wieder in jeweils zwei Summen der Länge $n/4$, etc. bis alle Summanden nur noch einen Term und damit das Ergebnis enthalten. Das funktioniert wenn n eine Zweierpotenz ist. Ist n z. B. eine Dreierpotenz, geschieht eine sukzessive Aufspaltung in drei Summanden. Ist n das Produkt einer Zweier- und Dreierpotenz, so kann man beide Methoden kombinieren. Ein ausführliches Beispiel mit $n = 4$ kann man in Opfer [1994, S. 23] finden.

Aufgabe P32. Das Problem $\max |f(x) - v(x)| = \min$, $x \in B$, $v \in V$ ist für reelle Funktionen f, v äquivalent zu

$$-\gamma \leq f(x) - v(x) \leq \gamma \text{ für alle } x \in B; \quad \gamma = \min . \tag{L11.1}$$

Das Problem schreibt man üblicherweise in die Form

$$\begin{aligned} \gamma - v(x) &\geq -f(x), \\ \gamma + v(x) &\geq f(x), \qquad \text{für alle } x \in B, \\ \gamma &= \min . \end{aligned} \tag{L11.2}$$

Ist V ein Vektorraum der Dimension n, so handelt es sich hier um ein sog. *lineares, semiinfinites Optimierungsproblem*, da die Anzahl der Unbekannten endlich, nämlich n, aber die Zahl der Ungleichungen i. a. nicht endlich ist. Für jedes $x \in B$ gibt es zwei Ungleichungen. Besteht B aus m Punkten (im Regelfall sehr viel mehr als n), so ist das ein übliches Matrixproblem (aber ohne Vorzeichenbedingungen) mit $2m$ Zeilen und $n+1$ Unbekannten, das in die Form $\mathbf{Au} \geq \mathbf{f}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \min$ gebracht werden kann mit $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Es ist extrem zweckmäßig zum Rechnen das duale Problem zu verwenden,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} &= \mathbf{c}, \\ \mathbf{v} &\geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{v} &= \max . \end{aligned} \tag{L11.3}$$

Dieses Problem hat Gleichungsform und Vorzeichenbeschränkungen, (die sog. *kanonische Form* der linearen Optimierung) und die quadratischen Teilmatrizen von $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ sind klein. Geht dieses Problem durch Diskretisierung aus (L11.2) hervor, sind Nachbarzeilen sehr ähnlich, im Dualproblem kann man also erwarten, daß sich Nachbarspalten nur wenig unterscheiden.

Aufgabe P33. Sind x_j die alten und x'_j die neuen Knoten, und ist ε die zu den alten Knoten berechnete Fehlerfunktion, zu der die untere Schranke $0 \leq a < ||\varepsilon||$ gehört, so muß $\operatorname{sign} \varepsilon(x'_j) + \operatorname{sign} \varepsilon(x'_{j+1}) = 0$ auch für die neuen Knoten gelten und $|\varepsilon(x'_j)| \geq a$ für alle Knoten, und für einen neuen Knoten mit einer Nummer j_0 muß gelten: $|\varepsilon(x'_{j_0})| \geq 0.5(a + ||\varepsilon||)$. Man kann diese Bedingungen erfüllen, indem man alle Knoten bis auf einen fest läßt und für einen neuen Knoten mit Nummer j_0 die genannte Bedingung erfüllt. Das führt zu einem (langsamen) *Einzelaustausch*.

Hausaufgaben:

Aufgabe 21. Es ist $f(-z) = -f(z), f(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}f(z), f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$. Die einzigen Polynome in Π_4 mit dieser Eigenschaft, haben die Form $v(z) = az$ mit $a \in \mathbb{R}$. Das Problem hat also jetzt die einfache Form $||z^5 - az||_\infty =$

min. Betrachten wir $e(z) := |z^5 - az| = |z|\,|z^4 - a|$ an den Ecken $E \in \{\pm 1 \pm \mathrm{i}\}$ des Quadrats, so ist $e(E) = \sqrt{2}|4 + a|$. Wir probieren auch noch die Seitenmittelpunkte $M \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$. Dort ist $e(M) = |1 - a|$. Um mindestens dim+1=6 Extremalpunkte zu erhalten, wählen wir jetzt a so, daß $\sqrt{2}|4 + a| = |1 - a|$, also $a = 5\sqrt{2} - 9 \approx -1.9289$. Tatsächlich gibt es noch eine andere reelle Lösung, die aber hier nicht in Frage kommt. Dann ist $e(E) = e(M) = 5(2 - \sqrt{2}) \approx 2.9289$ für alle Ecken E und alle Seitenmittelpunkte M. Man kann auch anders argumentieren: Wegen der Symmetrien betrachtet man nur das Segment $S := [\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}]$ und darauf den eindimensionalen Haarschen Raum $V := < z >$. Dann braucht man nur zwei Extremalpunkte, z. B. die beiden Endpunkte von S. Um zu beweisen, daß wir bereits die b. A. gefunden haben, definieren wir das Funktional

$$\ell(g) = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}\big((1 + \mathrm{i})g(\mathrm{i}) - \mathrm{i}g(1 + \mathrm{i})\big)$$

auf $\mathrm{C}(S)$. Offensichtlich ist $\ell(v) = 0$ und $||\ell|| = 1$ und $\ell(f) = 5(2 - \sqrt{2})$. Da die untere Schranke mit der oberen Schranke übereinstimmt, ist $v(z) = az$ mit obigem a b. A. von f. Bilder der Fehlerfunktion ε sind hinten angegeben (Abb. L11.6–L11.8).

Aufgabe 22. Die Lösungen (ausgerechnet von Reinhard Meier) stehen in den folgenden beiden Tabellen.

Tabelle L11.4. Aufgabe 22(a) nach Formel (L10.2)

```
      \gamma              c            c(1)          *      c(2)    *      c(3)    *      t

                   13.2220          13.4720                14.5831         19.2692          19.2692
4.0000+12.5664i    2.0408+5.3856i   2.3430+4.5478i          4.6861          9.8970  (1)   2.4408
1.0000+ 6.2832i    0.5556+2.0944i   1.1111                 12.3609  (1)    3.2652          3.2652
0.4444+ 4.1888i    0.3022+0.8378i   2.3430-4.5478i         -9.0957   1    21.4565  (1)    5.9009
0.2500+ 3.1416i    0.2500          12.9720          (1)     8.7832          2.4408          9.8970
0.1600+ 2.5133i    0.3022-0.8378i  -3.1712+5.6299i   1     -6.3424         15.1256  (1)   15.1256
0.1111+ 2.0944i    0.5556-2.0944i  -4.1888           1     17.1608  (1)    5.9009         21.4565
0.0816+ 1.7952i    2.0408-5.3856i  -3.1712-5.6299i   1    -11.2599   1    28.4206  (1)   28.4206

F\"ur jede Komponente von c(1), c(2) und c(3) ist eine Addition n\"otig.
 1  ist eine Multiplikation.
(1) ist eine Multiplikation mit Eins.
 t  ist c(3)(0,4,2,6,1,5,3,7)

Es ergeben sich also:

24 Additionen,
12 Multiplikationen,
 5 Multiplikationen, wenn man diejenigen mit Eins umgeht.

Allgemein:

log2(n)*n        Additionen,
log2(n)*n/2      Multiplikationen,
log2(n)*n/2-n+1  Multiplikationen, wenn man diejenigen mit Eins umgeht.
```

Tabelle L11.5. Aufgabe 22(b) nach Formel (L10.3)

```
               k=0                 k=1                 k=2                 k=3

cl(0)  15.2628 + 5.3856i  10.8569 + 5.2513i   7.8364 + 2.0408i   7.9707 - 2.3651i
cl(1)   0.8578 + 2.9322i   0.1769 + 2.9005i  -0.2822 + 2.3966i  -0.2505 + 1.7157i
cl(2)   0.5522 - 0.8378i   1.0561 - 0.3787i   1.0878 + 0.3022i   0.6287 + 0.8061i
cl(3)   2.5964 - 7.4800i   5.8068 - 4.4595i   5.9411 - 0.0536i   2.9207 + 3.1569i

cr(0)  11.1812 - 5.3856i  15.5871 - 5.2513i  18.6076 - 2.0408i  18.4732 + 2.3651i
cr(1)   0.2533 + 1.2566i   0.9342 + 1.2883i   1.3933 + 1.7922i   1.3616 + 2.4731i
cr(2)  -0.0522 + 0.8378i  -0.5561 + 0.3787i  -0.5878 - 0.3022i  -0.1287 - 0.8061i
cr(3)  -1.4853 + 3.2912i  -4.6957 + 0.2707i  -4.8300 - 4.1352i  -1.8096 - 7.3457i

cl sind die Koeffizienten der ersten  Summe aus L10.3
cr sind die Koeffizienten der zweiten Summe aus L10.3

F\"ur jede Komponente von cl ben\"otigt man eine Addition und eine Multiplikation.
F\"ur jede Komponente von cr ben\"otigt man eine Addition, da die Multiplikationen die
gleichen wie bei cl sind.


                              Additionen   Multiplikationen    mit ~=1    mit 1
==========================================================================
Berechnung der cl und cr:        32             16              12        4
Auswertung der ersten Summe:     12             16               9        7
```

```
Auswertung der zweiten Summe:     12              16                 9        7
===============================================================================
insgesamt                         56              48                30       18


allgemein
                              Additionen       Multis        mit ~=1          mit 1
=======================================================================================
Berechnung der cl und cr:      1/2 n^2         1/4 n^2   1/4 n^2 - n/2         n/2
Auswertung der ersten Summe:   1/4 n^2 - n/2   1/4 n^2   1/4 n^2 - n + 1       n-1
Auswertung der zweiten Summe:  1/4 n^2 - n/2   1/4 n^2   1/4 n^2 - n + 1       n-1
=======================================================================================
insgesamt                         n(n-1)       3/4 n^2   3/4 n^2 - 2.5n + 2    2.5n - 2

```

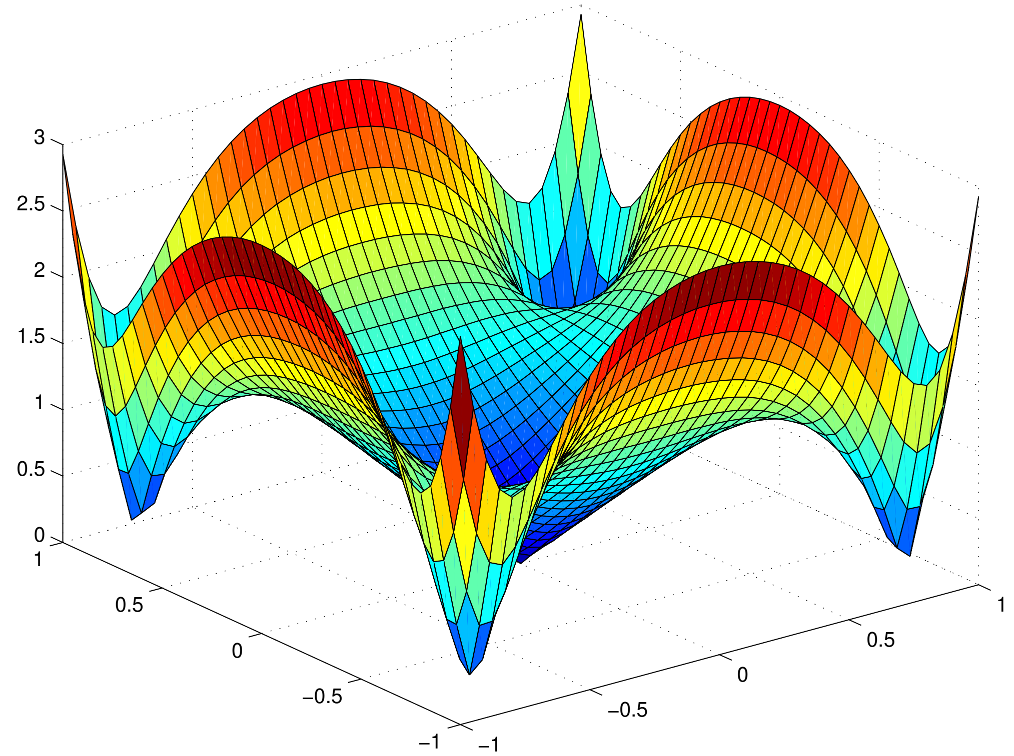
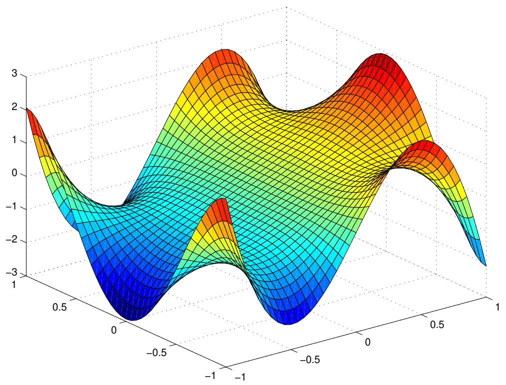


Abbildung L11.6. Fehler $|z^5 - az|$ auf Quadrat



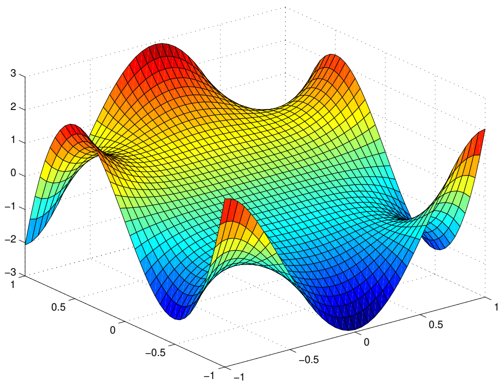


Abbildung L11.7. Realteil $\Re(z^5 - az)$ auf Quadrat Abbildung L11.8. Imaginärteil $\Im(z^5 - az)$ auf Quadrat

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`