**Übungen Approximation**

Gerhard Opfer SS 1999

---

**Bogen 10: Übungen am 22. Juni 1999**

**Lösungshinweise**

---

**Präsenzaufgaben:**

**Aufgabe P28.** (a) $t_n$ ist die b. A. von $f$ im $L_2$-Sinne. (b) Der Definitionsberereich ist $]-\pi,\pi[$ auf dem $f$ periodisch fortgesetzt wird mit $f(x)=0$ für $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Was entsteht, ist die sog. Sägezahnkurve, eine ungerade Funktion, deren Fourierreihe also eine reine Sinus-Reihe ist. Die Koeffizienten sind

$$a_j=0,\ j\geq 0,\ b_j=(-1)^{j-1}\frac{2}{j},\ j\geq 1.$$

(c) Hier entsteht die Rechteckskurve, ebenfalls eine ungerade Funktion. Die Koeffizienten sind

$$a_j=0,\ j\geq 0,\ b_{2j-1}=\frac{4}{\pi(2j-1)},\ b_{2j}=0,\ j\geq 1.$$

Die zu (b) und (c) gehörenden trigonometrischen Summen sind in Abb. L10.5 und Abb. L10.6 mit jeweils zehn (nicht verschwindenden) Summanden gezeichnet.

**Aufgabe P29.** (a) Die entsprechende Summe $t_n(x_k)$ mit äquidistanten $x_k$, (b1) Fast Fourier Transform, (b2) eine Summe wird in zwei Summen halber Länge aufgeteilt, und dieser Prozeß wird wiederholt, bis die Summen nur noch einen einzigen Term enthalten.

**Aufgabe P30.** Die Form ist $\tau_k=\sum_{j=0}^{n-1}c_jw_n^{jk}$ mit $w_n$ aus (10.1) und $k=0,1,\ldots,n-1$. Gesucht $c_j$, gegeben $\tau_k$. Die Summe kann explizit nach den $c_j$ aufgelöst werden. Man erhält wieder eine diskrete trigonometrische Summe mit den $\tau_k$ als Koeffizienten, nämlich $c_k=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\tau_jw_n^{-jk}$.

**Hausaufgaben:**

**Aufgabe 19.**

$$\text{(a)}\quad a_0=\pi,\ a_j=\frac{2}{\pi j^2}((-1)^j-1),\ j>0,\ b_j=0;\quad \text{(b)}\quad a_0=\frac{8\pi^2}{3},\ a_j=\frac{4}{j^2},\ j>0,\ b_j=-\frac{4\pi}{j},\ j>0.$$

Die Graphen von $f$ und $t_1$ (Fall (a)) und $f$ und $t_5$ (Fall (b)) stehen in Abb. L10.3 bzw. L10.4.
An Unstetigkeitsstellen $\xi$ von $f$ konvergiert die Fourierreihe von $f$ (Voraussetzung: $f$ stückweise differenzierbar, Courant-Hilbert I, [1968, S. 61]) gegen $\frac{1}{2}(f(\xi-)+f(\xi+))$, also

$$t_n(0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}a_j=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\to 2\pi^2\Rightarrow\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

**Aufgabe 20.** Wesentlich zur Umrechnung sind die Formeln (mit: $n=2m,\ w_n:=\exp(2\pi\mathrm{i}/n)$)

(L10.1) $$w_n^r=w_n^s\Leftrightarrow r-s=\ell n \text{ für ein } \ell\in\mathbb{Z},\quad w_n^{2\ell}=w_m^{\ell}.$$

Fall (a):

(L10.2) $$t_n(x_{2k}):=\sum_{j=0}^{m-1}(c_j+c_{j+m})w_m^{jk},\quad t_n(x_{2k+1}):=\sum_{j=0}^{m-1}w_n^j(c_j-c_{j+m})w_m^{jk},$$
$$k=0,1,\ldots,m-1.$$

Fall (b):

(L10.3) $$t_n(x_k):=\sum_{j=0}^{m-1}(c_{2j}+w_n^kc_{2j+1})w_m^{jk},\quad t_n(x_{k+m}):=\sum_{j=0}^{m-1}(c_{2j}-w_n^kc_{2j+1})w_m^{jk},$$
$$k=0,1,\ldots,m-1.$$

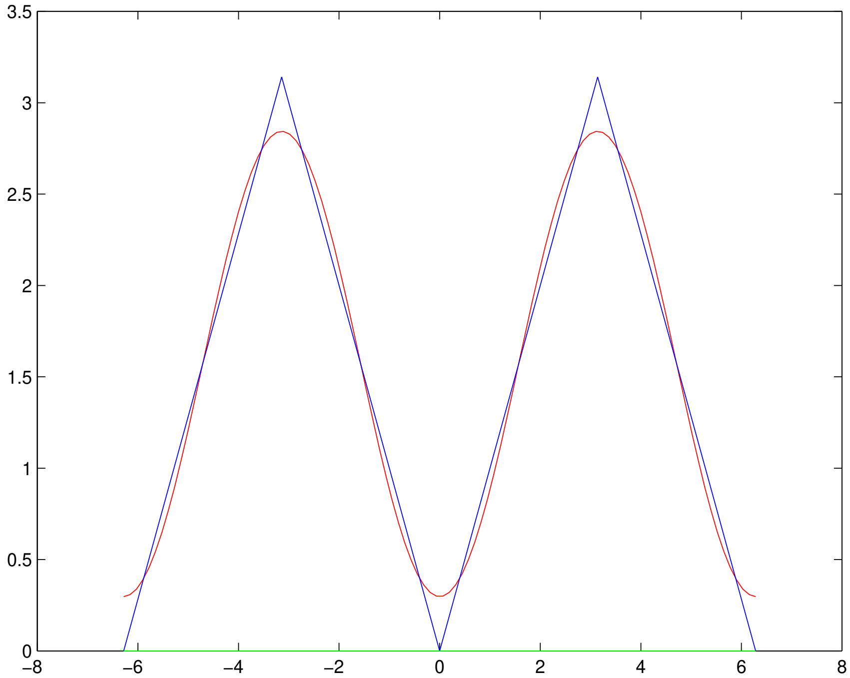


**Abbildung L10.3** Fourierreihe $t_1$ für $|x|$

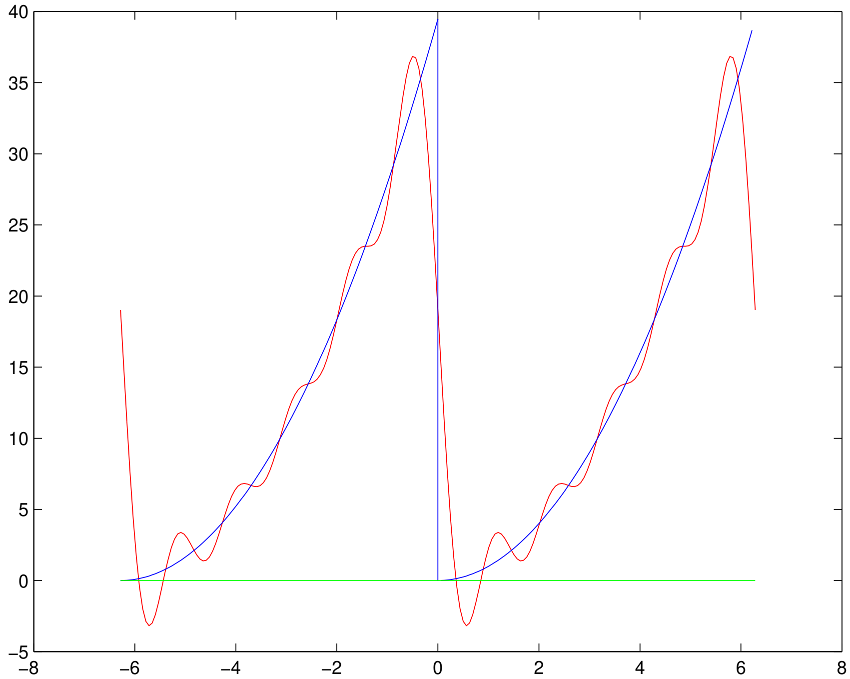


**Abbildung L10.4** Fourierreihe $t_5$ für $x^2$

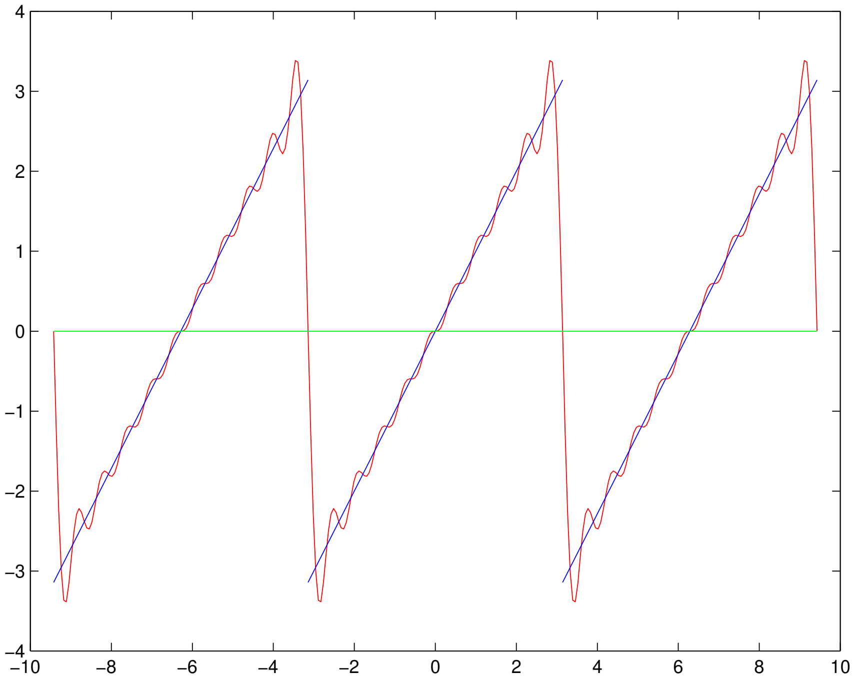


**Abbildung L10.5** Die Fourierreihe $t_{10}$ der Sägezahnkurve

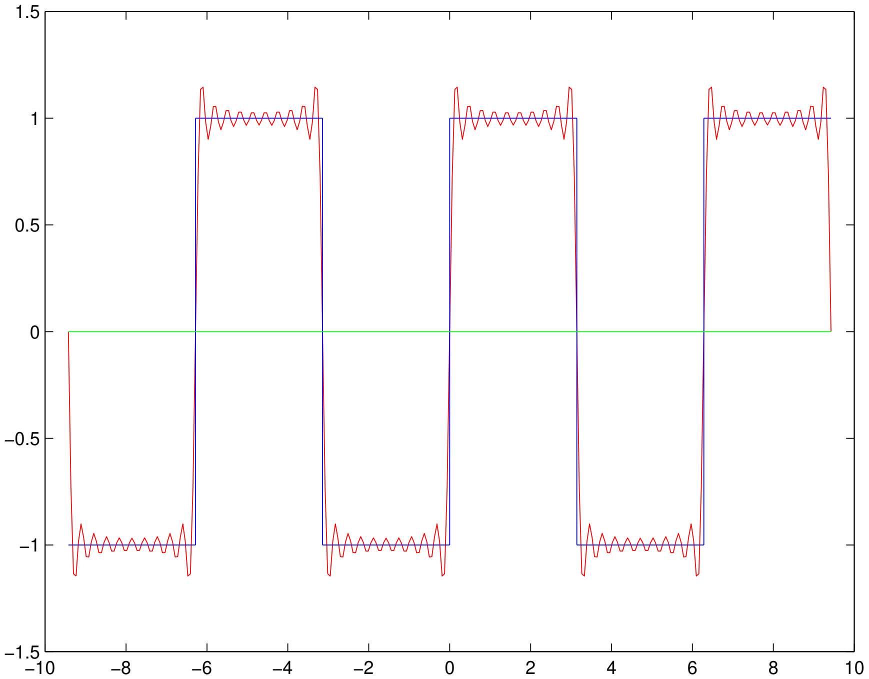


**Abbildung L10.6** Die Fourierreihe $t_{19}$ der Rechteckskurve

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`