Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 9: Übungen am 15. Juni 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P25. Die trigonometrischen Funktionen $V := \langle 1, \sin, \cos, \sin 2, \cos 2, \ldots, \sin m, \cos m\rangle$ mit Dimension $n = 2m+1$ bilden auf $[0, 2\pi]$ kein Haarsches System, da wegen der 2π-Periodizität aller Elemente in V jede Nullstelle von $v \in V$ am Nullpunkt auch eine Nullstelle bei 2π ist. Beispielsweise hat $1 + \sin x - \cos x$ genau drei Nullstellen, bei 0, $3\pi/2$, 2π, eine zuviel. Betrachtet man die Funktionen auf $[0, \pi[$, so ist der Nachteil, daß dieses Intervall nicht kompakt ist. Man kann das Intervall $[0, \pi[$ aber *kompaktifizieren*, indem man die beiden Endpunkte, Null und 2π identifiziert. In diesem Fall kann man das Intervall auch als die Peripherie eines Kreises mit Radius Eins auffassen, und diese Kreislinie ist kompakt.

Aufgabe P26. Das die Orthogonalität definierende Skalarprodukt ist

$$< u, v > := \int_{-1}^{1} \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x. \tag{L9.1}$$

Benutzen wir die Definition $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$, und setzen wir $y = \arccos x$, bzw. $x = \cos y$, so ist

$$< T_m, T_n > = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos my \cos ny\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \pi & \text{für } m = n = 0, \\ \pi/2 & \text{für } m = n > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{L9.2}$$

Aufgabe P27. Die Punkte $(x, T_n(x))$ liegen alle im Quadrat $Q := [-1, 1]^2$. Entweder wird das Quadrat vollständig ausgefüllt oder nicht. Die Frage, ob jeder Punkt $(x, y) \in Q$ vorkommt, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob es ein n gibt mit $T_n(x) = y$. Wir betrachten ein einfaches Beispiel: Gibt es n mit $T_n(0.5) = 0$? Der Kosinus ist 0.5 bei $x = \pi/3$ und bei $x = 5\pi/3$ mit periodischer Wiederholung, die Nullstellen vom Kosinus liegen bei $(2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Frage läuft also darauf hinaus, ob es $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $(2k+1)/(2n) = 1/3$ oder $(2k+1)/(2n) = 5/3$. Das ist gleichbedeutend damit, daß $3(2k+1) = 2n$ oder $3(2k+1) = 10n$ ist. Da links immer eine ungerade, rechts eine gerade Zahl steht, kann keine Lösung existieren. Zeichnet man alle T-Polynome nur bis zu einem Grad n_0 (etwa 40), so gibt es deutlich erkennbare, nicht ausgefüllte Stellen, die die Form von *weißen Kurven* haben. Das Muster dieser weißen Kurven hat Rivlin [1990, S. 208 ff.] untersucht.*)

Hausaufgaben:

Aufgabe 17. (a) Seien T_n die in (9.3) definierten Funktionen. Dann ist $T_0 = 1$, $T_1(x) = x$. Wir benutzen das Additionstheorem (Abramowitz & Stegun [1964, Formel 4.5.39, S. 84]) $\cosh(a+b) + \cosh(a-b) = 2\cosh a \cosh b$. Wir setzen $a = n \operatorname{arccosh} x, b = \operatorname{arccosh} x$. Dann ist $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2T_n(x)x$. Wir erhalten die Rekursionsformel (9.2) mit denselben Anfangswerten. Damit definieren die in (9.1) angegebenen Funktionen auch die bereits bekannten T-Polynome.
(b) Das charakteristische Polynom $\chi(z) := z^2 - 2xz + 1$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} := x \pm \sqrt{x^2-1} = x \pm \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}$. Setzen wir $x = \cos\varphi$, so ist $\lambda_{1,2} = \exp(\pm \mathrm{i}\varphi)$. Für $x^2 \neq 1$ bzw. $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ist die allgemeine Lösung τ_n der Differenzengleichung $\tau_n(x) = a\exp(\mathrm{i}n\varphi) + b\exp(-\mathrm{i}n\varphi)$. Die Forderung $\tau_0 = 1$ und $\tau_1(x) = x$ führt auf $a = b = 1/2$, also $\tau_n(x) = T_n(x) = 0.5(\exp(\mathrm{i}n\varphi) + \exp(-\mathrm{i}n\varphi) = \cos n\varphi = \cos(n \arccos x)$. Diese Formel ist auch richtig für $x^2 = 1$. Die Anfangswerte $\tau_0 = 1$, $\tau_1(x) = 2x$ führen auf $a = -\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\varphi)/(2\sin\varphi)$, $b = \mathrm{i}\exp(-\mathrm{i}\varphi)/(2\sin\varphi)$ und die spezielle Lösung $\tau_n(x) = U_n(x) := \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$. Das sind die T-Polynome *zweiter Art*. Z. B. ist $U_2(x) = \sin 3\varphi/\sin\varphi = (3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi)/\sin\varphi = 3 - 4\sin^2\varphi = -1 + 4\cos^2\varphi = -1 + 4x^2$.

---

*) T. J. Rivlin: Chebyshev polynomials, 2nd ed., Wiley, New York, 1990, 249 S.

Aufgabe 18. Die Rechenergebnisse (Reinhard Meier) ergeben sich aus der Tabelle L9.3.

Tabelle L9.3. Alternantenpunkte, obere und untere Schranken bei einigen Tschebyscheff-Approximationen mit Polynomen vom Grad 4

Funktion	iter	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	obere Schr.	untere Schr.
exp(-x^2)	1	0.0000	0.0956	0.3425	0.6477	0.9007	1.0000	0.000463	0.000463
besselj(1,x)	1	0.0000	0.7070	2.4248	4.4772	6.2531	7.0000	0.051300	0.051299
x*sin(1/x)	3	0.0577	0.1319	0.2236	0.4548	0.8198	1.0000	0.150392	0.150392
sin(0.25*pi*x)	0	0.0000	0.0955	0.3455	0.6545	0.9045	1.0000	0.000004	0.000004
tan(0.25*pi*x)	1	0.0000	0.1048	0.3722	0.6846	0.9172	1.0000	0.000286	0.000286

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`