Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 8: Übungen am 8. Juni 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P22. Wir betrachten die Abb. L8.1. Die fünf eingezeichneten Punkte erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von de la Vallée Poussin, das Minimum der Ordinaten (betragsmäßig), in diesem Fall $|a_0| = 0.7505$ ist also eine untere Schranke für $\rho_V(f)$.

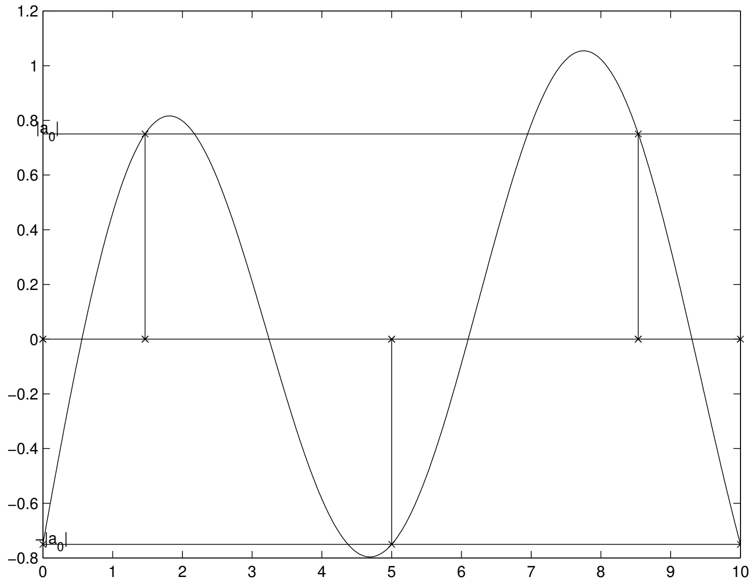

Abbildung L8.1. Fehlerfunktion sinus minus kubisches Polynom

Aufgabe P23. Wir nehmen dasselbe Bild und verschieben die Punkte bei $x = 1.46$, 5, 8.54 in die Nähe der lokalen Extremwerte, linkes Bild von Abb. L8.2, und lösen das entsprechende lineare Gleichungssystem neu, rechtes Bild von Abb. L8.2. Die untere bzw. obere Schranken ist nach einem Schritt bereits 0.8511 bzw. 0.8524, d. h. die Fehlerfunktion ist optisch kaum noch verbesserbar.

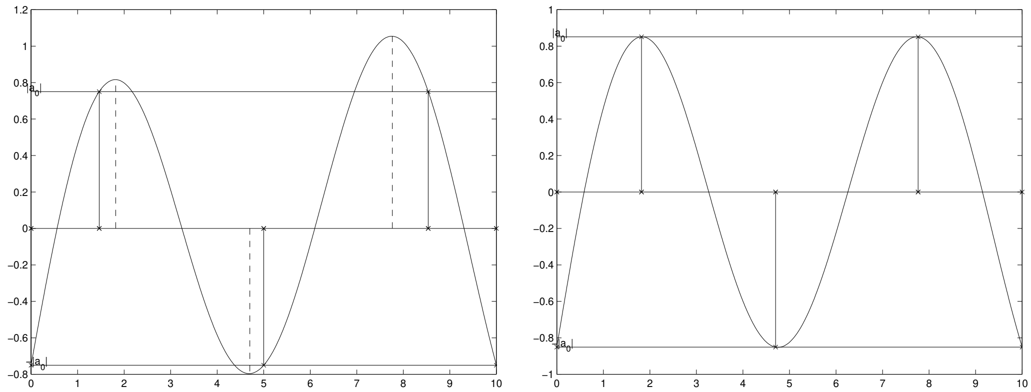

Abbildung L8.2. Ein Schritt des Remez-Algorithmus

Aufgabe P24. Aus (8.3) folgt $||f-\hat{v}||_\infty \le ||f-v||_\infty - \gamma||\hat{v}-v||_\infty$, daher ist klar, daß große γ besser sind.

Hausaufgaben:

Aufgabe 15. (a) Die beiden in (8.2) angegebenen Probleme sind eindeutig lösbar, da V ein Haarscher Raum der Dimension n ist. Seien die Lösungen u, w. Wir setzen $v := u - a_0 w$ mit einem noch freien a_0. Dann ist $\varepsilon(x_k) := y_k - v(x_k) = y_k - (u(x_k) - a_0 w(x_k)) = y_k - y_k + a_0(-1)^k = a_0(-1)^k$ für alle $k \neq k_0$. Das Gleichungssystem (8.1) wird vom obigen v also bereits für alle $k \neq k_0$ und jedes a_0 gelöst. Damit die Gleichung (8.2) auch für k_0 gilt, muß $\varepsilon(x_{k_0}) := y_{k_0} - v(x_{k_0}) = y_{k_0} - u(x_{k_0}) + a_0 w(x_{k_0}) = (-1)^{k_0} a_0$ gelten. Daraus folgt

$$a_0 = \frac{u(k_0) - y_{k_0}}{w(x_{k_0}) - (-1)^{k_0}}. \tag{L8.3}$$

Das Gleichungssystem (8.1) ist eine Folgerung aus dem Alternantensatz für Haarsche Systeme auf Intervallen $[a,b]$. In diesem Fall setzen wir $a \le x_k < x_{k+1} \le b$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ voraus, und aus (8.2) folgt dann für w, daß w genau $n-1$ Nullstellen haben muß, und $\operatorname{sign} w(x_{k_0}) = -(-1)^{k_0}$, egal wie k_0 gewählt wird. Ist nämlich x_{k_0} ein innerer Knoten, so hat w auf $[x_{k_0-1}, x_{k_0+1}]$ überall dasselbe Vorzeichen, ist aber $x_{k_0} = x_0$ oder $x_{k_0} = x_n$, so hat w auf $[a, x_1]$ bzw. auf $[x_{n-1}, b]$ dasselbe Vorzeichen. Bei der Bildung der Differenz im Nenner bei der Berechnung von a_0 kann also niemals Auslöschung eintreten.

Aufgabe 16. (a) Aus (8.3) folgt

$$||f-\hat{v}||_\infty + \gamma||\hat{v}-v||_\infty \le ||f-v||_\infty \le ||f-\hat{v}||_\infty + ||\hat{v}-v||_\infty \Rightarrow \gamma \le 1. \tag{L8.4}$$

(b) Sei $\varepsilon(x) := f(x) - \hat{v}(x)$. Dann ist $||\varepsilon||_\infty = 1/8$, $\varepsilon(0) = -\varepsilon(0.5) = \varepsilon(1) = -1/8$, also ist $\hat{v}(x)$ b. A. von f, da wegen $\dim V = 2$, ε eine Alternante der Länge drei (=$\dim V + 1$) besitzt, daher ist $\rho_V(f) = 1/8$.
(c) (Reinhard Meier) Wir setzen $v(x) := a + bx$. Für γ gilt dann

$$\gamma \le \Gamma(a,b) := \frac{||f-v||_\infty - 1/8}{||\hat{v}-v||_\infty} \text{ für alle } v \in V. \tag{L8.5}$$

Das Infimum über alle v, bzw. alle a, b ist also der gesuchte Wert und

$$\Gamma(a,b) = \begin{cases} \dfrac{\max(|a|, |a+b-1|, |a+b^2/4|) - 1/8}{\max(|a+1/8|, |a+b-7/8|)} & \text{für } b \in [0,2], \\ \dfrac{\max(|a|, |a+b-1|) - 1/8}{\max(|a+1/8|, |a+b-7/8|)} & \text{für } b \notin [0,2]. \end{cases} \tag{L8.6}$$

Die Fallunterscheidung kommt dadurch zustande, daß nur für bestimmte Werte von b das differenzierbare Maximum von $f - v$ im Intervall $[0,1]$ liegt.
Eine genauere Untersuchung zeigt, daß die kleinsten Werte von Γ in der Umgebung der Bestapproximation liegen. Es ist jedoch Γ in $(-1/8,\ 1)$ nicht stetig fortsetzbar, es existieren verschiedene Grenzwerte, je nachdem, aus welcher Richtung man sich diesem Punkt nähert.
Eine noch genauere Untersuchung zeigt, daß man die kleinsten Werte erhält, wenn man Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k > 1$ und $\lim_{k\to\infty} b_k = 1$ und $a_k = -b_k^2/8$ wählt. Die Folgen sind so gewählt, daß die Beträge von $f - v$ am linken Rand und am differenzierbaren Maximum übereinstimmen, und der Betrag von $f - v$ am rechten Rand kleiner ist. Das Betragsmaximum von $\hat{v} - v$ wird dann am rechten Rand eingenommen. Natürlich kann man (a_k) und (b_k) auch so wählen, daß die Beträge von $f - v$ am rechten Rand und am differenzierbaren Maximum übereinstimmen, und der Betrag von $f - v$ am linken Rand kleiner ist. Das Betragsmaximum von $\hat{v} - v$ wird dann am linken Rand eingenommen.
Es ist

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \Gamma(a_k, b_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{b_k^2/8 - 1/8}{-b_k^2/8 + b_k - 7/8} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1+b_k)(b_k-1)}{(7-b_k)(b_k-1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+b_k}{7-b_k} = \frac{1}{3}.$$

Ein Graph der Funktion Γ ist in Abb. L8.7, großer Ausschnitt und in Abb. L8.8, kleiner Ausschnitt in der Nähe von $\hat{v}$ angegeben.

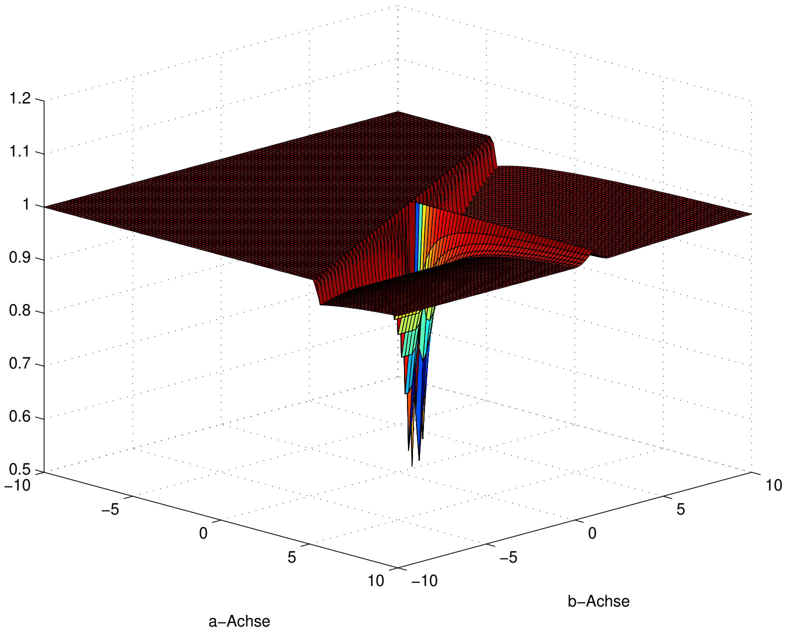

Abbildung L8.7 Γ als Funktion von $a, b \in [-10, 10]$

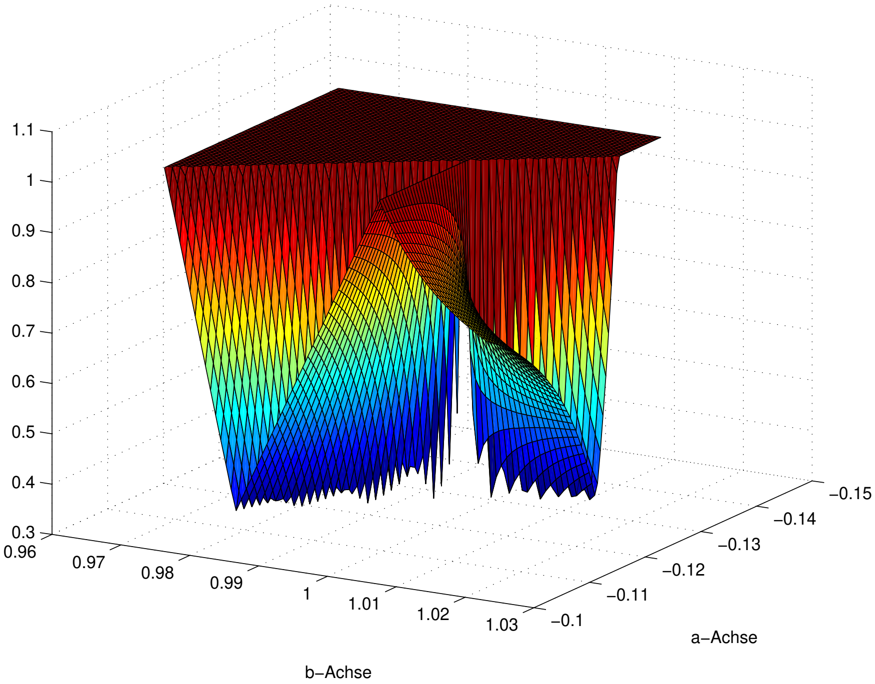

Abbildung L8.8 Γ als Funktion von a und b in der Nähe der Lösung

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`