Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 7: Übungen am 1. Juni 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P19. Wir verwenden hier die sogenannte *Indikatorfunktion* $\chi : M \to \{0,1\}$ einer beliebigen nichtleeren Menge M mit

$$\chi(T)(t) := \begin{cases} 1, & \text{für } t \in T \subset M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Sei $t_1 = 0 < x < 0.5 = t_3$. Wir müssen also B_{12} ausrechnen. Es ist $B_{11} = \chi[0,0.5[$, $B_{21} = 0$; $B_{12} = \frac{x-t_1}{t_3-t_1}B_{11} + Faktor * B_{21} = 2x\chi[0,0.5[$. (b) Sei $t_2 = 0.5 < x < 1 = t_4$. Es ist hier $B_{21} = 0$, $B_{31} = \chi[t_3,t_4[= \chi[0.5,1[$; $B_{22} = Faktor * B_{21} + \frac{t_4-x}{t_4-t_3}B_{31} = 2(1-x)\chi[0.5,1[$. Die Unstetigkeitsstelle bei $x = 0.5$ kann man gut erkennen, und auch, daß dort der Spline von rechts stetig ist.

Aufgabe P20. Bildet der lineare Raum der B-Splines ein Haarsches System? Nein: Zwei Gründe: (a) Es gibt stückweise, verschwindende Splines, die nicht überall verschwinden, (b) der Satz von Schoenberg-Whitney sagt, daß das Interpolationsproblem nur unter gewissen Umständen, aber nicht immer lösbar ist.

Aufgabe P21. In welchen Räumen gilt die Parallelogrammgleichung $||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2||f||^2 + 2||g||^2$? Nur in Räumen mit Skalarprodukt. Warum heißt sie so? Man kann sie sich mit Hilfe eines Parallelogramms, in das auch die Diagonalen eingezeichnet werden, merken. Berechnen Sie die vorkommenden Ausdrücke für $f(t) = 1, g(t) = t$, $t \in [0,1]$ und T-Norm $||\quad||_\infty$. Die rechte Seite ist 4, die linke 4+1=5. Gilt die Parallelegrammgleichung, kann das Skalarprodukt $<\quad,\quad>$ folgendermaßen konstruiert werden:

$$< x, y > := 1/4\{||x+y||^2 - ||x-y||^2 + \mathrm{i}(||x+\mathrm{i}y||^2 - ||x-\mathrm{i}y||^2)\}.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist der imaginäre Teil wegzulassen. Den imaginären Teil kann man mit einem einfachen Rezept aus dem Realteil konstruieren. Ist nämlich $L(x) = \Re L(x) + \mathrm{i}\Im L(x)$ ein lineares, aber komplexes Funktional und ist $\Re L(x)$ bekannt, so ist $L(\mathrm{i}x) = \Re L(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\Im L(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}L(x) = \mathrm{i}(\Re L(x) + \mathrm{i}\Im L(x)) = \mathrm{i}\Re L(x) - \Im L(x)$, also $\Im L(x) = -\Re(\mathrm{i}x)$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 13. Ein m-fach vorkommender Splineknoten $t_j = t_{j+1} = \cdots = t_{j+m-1}$ heißt ein *m-facher Knoten*, für $m = 1,2$ heißt er *einfach*, bzw. *doppelt*. Die Bedingung $t_j < t_{j+k}$ für einen Spline der Ordnung k heißt, daß jeder Splineknoten höchstens k-fach vorkommen kann. Kommt ein Splineknoten im Inneren tatsächlich k-mal vor, so ist der entsprechende Spline an dieser Stelle unstetig. (a) Da nach (7.1) jedes dort vorkommende τ_j arithmetisches Mittel ist, gilt $\tau_j \in [t_{j+1}, t_{j+k-1}]$. Fall (i): $t_{j+1} < t_{j+k-1}$, dann ist $\tau_j \in]t_{j+1}, t_{j+k-1}[$ und daher $t_j < \tau_j < t_{j+k}$. Fall (ii): $\tau_j = t_{j+1} = t_{j+k-1}$. Ist t_{j+1} ein k-facher Knoten, so ist entweder $\tau_j = t_j$ oder $\tau_j = t_{j+k}$, d. h. die Bedingung von Schoenberg & Whitney gilt an diesem Knoten nicht. Ist der Knoten jedoch $(k-1)$-fach, so ist $t_j < \tau_j < t_{j+k}$, die Bedingung gilt also. (b) Die beiden Randbedingungen erfüllen nicht die Bedingungen von Schoenberg & Whitney. Für praktische Zwecke ist das aber irrelevant, da man t_1 etwas verkleinern oder τ_1 etwas vergrößern kann mit entsprechenden Maßnahmen auch am rechten Rand. Nach dem Argument von (a) ist $t_{j+k} \in]\tau_{j+1}, \tau_{j+k-1}[$, da die Interpolationsknoten strikt wachsend sind. Daraus folgt auch, daß die Splineknoten strikt wachsend angeordnet sind. Daraus folgt weiter $\tau_j < \tau_{j+1} < t_{j+k}$ und $t_j \in]\tau_{j+1-k}, \tau_{j-1}[$, somit auch $t_j < \tau_j$. Die Bedingungen von Schoenberg & Whitney sind also erfüllt. (c) Ist $a = \tau_1, b = \tau_n$, so gilt das in (b) Gesagte über die Randbedingungen. Aus (7.3) folgt $t_{j+k} = \tau_{j+k/2} < \tau_{j+k} < \tau_{j+3k/2} = t_{j+2k}$, $j = 1, 2, \ldots, n-2k$. Weiter ist $t_{k+1} = \tau_{1+k/2} > \tau_1 \geq a = t_1 = \cdots = t_k$ und entsprechend auch $t_n < t_{n+1}$,

Aufgabe 14. Die nachfolgenden Rechnungen wurden von Reinhard Meier ausgeführt. Die dort erwähnte *eigene Regel* wird so beschrieben: Die eigene Regel ist eine Abwandlung von Regel (7.2), bei der nach Berechnung der Spline- und Interpolationsknoten alle diese Knoten solange „gestreckt“ werden, bis die äußeren Interpolationsknoten auf den Intervallrändern zu liegen kommen. Nun zur Bewertung: Die Regel (7.2) ist bei äquidistanter Wahl der Splineknoten innerhalb des Intervalls sehr schlecht, da die Interpolationsknoten zu dicht aneinander liegen. Daher das „Strecken“ in der eigenen Regel, bei der dann einige der Splineknoten auch nach außerhalb verschoben werden. Die Regeln (7.3) und (7.4) liefern bei äquidistanter Wahl der Interpolationsknoten identische Ergebnisse. Die eigene Regel liefert für den Tangens und die Wurzel schlechtere Ergebnisse, bei der Funktion aus Schwarz sind die Ergebnisse zum Teil schlechter und zum Teil besser. Eine zu hohe Spline-Ordnung führt zu schlechteren Ergebnissen, eine Verbesserung kann durch Erhöhung der Anzahl der Spline-Knoten erreicht werden.

Tabelle L7.1 Verschiedene Splineinterpolationen

```
Funktion tan025pi, Regel (7.2)

          n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
k=4  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
k=5  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
k=6  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000


Funktion tan025pi, Regel (7.3)

          n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3            0.018578  0.006154  0.003125  0.001778  0.001109  0.000738
k=4                      0.003007  0.001086  0.000548  0.000303  0.000182
k=5                                0.000650  0.000219  0.000110  0.000059
k=6                                          0.000131  0.000045  0.000022


Funktion tan025pi, Regel (7.4)

          n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=4                      0.003007  0.001086  0.000548  0.000303  0.000182
k=6                                          0.000131  0.000045  0.000022


Funktion tan025pi, eigene Regel

          n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3  0.219896  0.169463  0.137261  0.123693  0.115435  0.110008  0.106517
k=4  0.193093  0.159661  0.125276  0.113814  0.106086  0.101303  0.097820
k=5  0.191558  0.159035  0.121422  0.111378  0.103315  0.098752  0.095348
k=6  0.182263  0.150366  0.110957  0.102495  0.094153  0.090012  0.086822


Funktion sqrt, Regel (7.2)

          n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
k=4  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
k=5  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
k=6  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000


Funktion sqrt, Regel (7.3)

          n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3            0.006532  0.002539  0.001376  0.000828  0.000538  0.000369
k=4                      0.001526  0.000629  0.000346  0.000205  0.000130
k=5                                0.000427  0.000181  0.000100  0.000059
k=6                                          0.000133  0.000057  0.000032


Funktion sqrt, Regel (7.4)

          n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=4                      0.001526  0.000629  0.000346  0.000205  0.000130
k=6                                          0.000133  0.000057  0.000032


Funktion sqrt, eigene Regel

```

```
           n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3   0.096035  0.100476  0.096278  0.093470  0.091979  0.090831  0.090280
k=4   0.085825  0.091847  0.089341  0.085745  0.084791  0.083713  0.083011
k=5   0.084979  0.089156  0.087846  0.082868  0.082645  0.081229  0.080761
k=6   0.076939  0.081431  0.080434  0.074483  0.075102  0.073178  0.073113


Funktion l06_schwarz, Regel (7.2)

           n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3   8.980805  7.631958  6.826239  6.418543  6.190924  6.046497  5.950482
k=4   9.322913  8.629446  8.047564  7.603430  7.274747  7.024117  6.830840
k=5   9.399032  9.051647  8.706984  8.353773  8.051829  7.793663  7.567576
k=6   9.408610  9.242879  9.059850  8.815799  8.577000  8.349540  8.136017


Funktion l06_schwarz, Regel (7.3)

           n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3             6.540781  5.075513  2.621644  1.399257  0.773813  0.591083
k=4                       5.246618  3.879100  2.214700  1.298666  0.665655
k=5                                 4.829009  3.526568  1.186059  0.703857
k=6                                           4.218685  2.247741  0.797841


Funktion l06_schwarz, Regel (7.4)

           n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=4                       5.246618  3.879100  2.214700  1.298666  0.665655
k=6                                           4.218685  2.247741  0.797841


Funktion l06_schwarz, eigene Regel

           n=2       n=3       n=4       n=5       n=6       n=7       n=8
k=3   5.729367  5.140550  4.411554  2.440513  1.816035  1.362836  1.115768
k=4   5.768729  5.421018  4.363622  2.626665  1.757800  1.238042  0.996778
k=5   5.770328  5.542225  4.384634  2.793176  1.674512  1.146383  0.937476
k=6   5.728087  5.666927  4.422834  2.883461  1.566995  1.044872  0.859237
```

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`