Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 5: Übungen am 11. Mai 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P13. Es wurden vier Fragen abgegeben: (1) Wie bestimmt man algorithmisch ein maximales Funktional. Antwort: mit dem Remez-Algorithmus. (2) Was kann man sich anschaulich unter einem Projektionsoperator P vorstellen. Antwort: Im $\mathbb{R}^2$ die übliche Projektion eines beliebigen Punktes auf die Koordinatenachsen A oder auf eine beliebige Gerade G. Wesentliche Eigenschaft: $Pv = v$ für alle $v \in V$ (im Beispiel $V = A$, oder $V = G$). (3) Warum sind Vorlesung und Übung nicht hinreichend koordiniert. Antwort: Auch die Übung muß als eigenständige Veranstaltung aufgefaßt werden. Daher kann es vorkommen, daß Stoff, der in der Übung, aber (noch) nicht in der Vorlesung erklärt wurde, geübt wird. (3a) Sei V endlich dimensional. Zeigen Sie: strikt konvex $\Rightarrow$ gleichmäßig konvex. Antwort: auf Bogen 2, Lösungshinweise, Aufgabe 4 (im internet). (4) Sei $X = c_0$ der Vektorraum aller Nullfolgen, und sei V der Teilraum aller Nullfolgen $\{v_j\}$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} v_j = 0$. Gesucht ist $v \in V\backslash\{0\}$. Antwort: $v = \{2, -4, 0, 0, \ldots\}$.

Aufgabe P14. Man muß nur die Steigung f_1' am mittleren Punkt m berechnen. Die Lösung ergibt sich aus einer einfachen linearen Gleichung, nämlich Mskr. S. 22, Gleichung (3.2) für $i = 1$.

Aufgabe P15. Die Definition geschieht *stückweise*, im Regelfall mit Polynomen, aber auch andere Funktionenklassen sind gebräuchlich, wie einfache rationale Funktionen. Wichtiger Aspekt ist die Glattheit an den Übergangsstellen. Hier kann man verschiedene Ansprüche stellen. Splines als Lösungen von *Variationsproblemen* ist ein weiterer wichtiger Aspekt.

Hausaufgaben: Hinweis: In allen Aufgaben ist $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$

Aufgabe 9. Wir müssen ein Intervall finden (Aufgabe 5, Bogen 3), in dem alle $v \in V\backslash\{0\}$ höchstens eine Nullstelle besitzen. (a) Ist $a \geq \frac{3}{4}\pi$, so hat $v(t) := \cos 2t \in V$ zwei Nullstellen $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, d. h. V ist in diesem Fall kein Haarscher Raum. (b) Sei $a \leq \frac{1}{2}\pi$, dann kann kein $v \in V\backslash\{0\}$ mehr als eine Nullstelle haben. Um das einzusehen, setzen wir $y := \cos t$, dann ist $\cos 2t = 2y^2 - 1$ und $t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ impliziert $y \in [0, 1]$. Wir müssen also $p(y) := ay + b(2y^2 - 1)$ in Abhängigkeit von den Parametern a, b mit $|a| + |b| > 0$ auf die Anzahl der Nullstellen in $[0, 1]$ untersuchen. Ist $b = 0$, so hat p nur eine Nullstelle ($y = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\pi$). Sei also $b \neq 0$. Dann können wir von p zu $\tilde{p}(y) := y^2 - 2\alpha y - 0.5 = (y - \alpha)^2 - (\alpha^2 + 0.5)$ übergehen, indem wir p durch $2b$ dividieren und $a/(2b) := -2\alpha$, $\tilde{p} := p/2b$ setzen. Die Nullstellen von $\tilde{p}$ liegen bei $y_\pm := \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 0.5}$. Wir erkennen sofort, daß $y_- < 0$ für alle α. Es kann daher im vorliegenden Fall höchstens eine Nullstelle geben. (c) Mit derselben Technik, indem man $p_\pm$ auf die Anzahl der Nullstellen in $[-1, 1]$ untersucht, kann man auch die noch verbleibenden Fälle behandeln. Für $\alpha \in [-0.25, 0.25]$ ist $-1 \leq p_- < p_+ \leq 1$ d. h. $\tilde{p}$ kann zwei Nullstellen in $[-1, 1]$ haben. Für $\alpha \notin [-0.25, 0.25]$ liegt mindestens eine Nullstelle $p_\pm$ außerhalb $[-1, 1]$. Ist $\alpha = 0.25$, so sind $p_+ = 1$, $p_- = -0.5$ bzw. $t = 0$, $t = \frac{2}{3}\pi$ Nullstellen, $a < \frac{2}{3}\pi$ ist also notwendig. Für $\alpha < 0.25$ ist $\arccos(p_-) > \frac{2}{3}\pi$, da $p_- < -0.5$. Die Bedingung $a < \frac{2}{3}\pi$ ist also auch hinreichend, dafür, daß V ein Haarsches System bildet. Man kann das auch sehr schön in Abbildung 5.2 erkennen.

Aufgabe 10. Der Spline S hängt nur von der Wahl des mittleren Knotens m ab. Wir bezeichnen ihn daher mit S_m und den Fehler mit $fe(x) := \tan(\frac{\pi}{4}x) - S_m(x)$ und $e(m) := \max_{x\in[0,1]} |fe(x)|$. Wir verwenden jetzt einen Computer und gucken uns fe und $e(m)$ für einige Werte von $m \in]0, 1[$ in Abbildung 5.1 an. Dort sehen wir eine relativ starke Abhängigkeit von der Wahl des mittleren Knotens m. Eine gute Wahl ist $m = 0.641$ mit $e(m) = 6.9959 \cdot 10^{-4}$. Aus der Abbildung entnehmen wir, daß es neben m zwei weitere kritische Werte x_l, x_r, die Maxima von fe links, bzw. rechts von m gibt. Für eine genauere Rechnung könnte man das nichtlineare Gleichungssystem $fe(x_l) = fe(x_r)$; $fe'(x_l) = 0$; $fe'(x_r) = 0$ für die drei Unbekannten x_l, m, x_r mit einem Quasi-Newton-Verfahren lösen. Diese Idee ergibt: $m = 0.64106\,57431\,91$, $x_l = 0.32647\,71940\,18$, $x_r = 0.82004\,03561\,61$, Rechnung: Reinhard Meier.

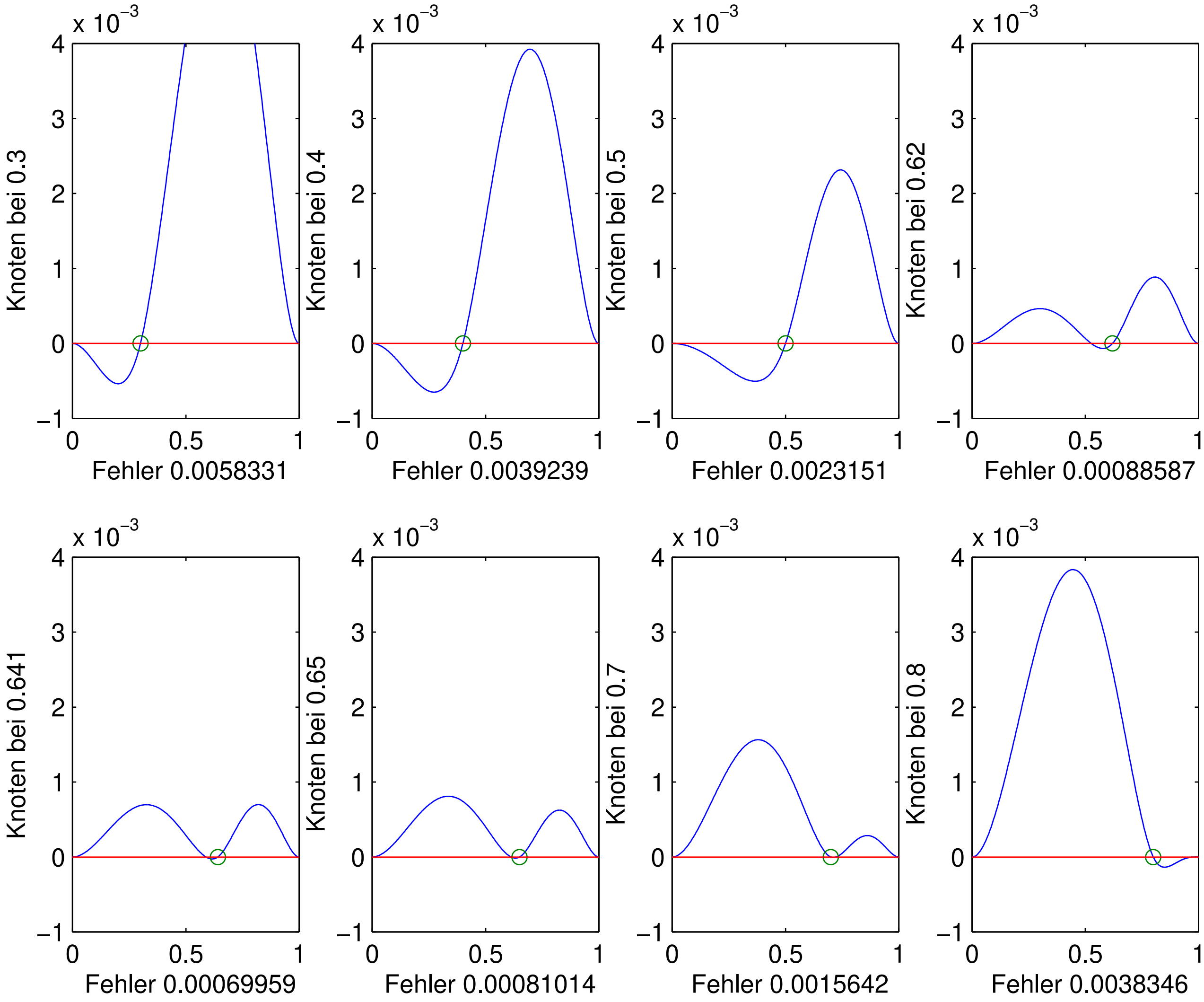

Abb. 5.1. Fehler $\tan(\frac{\pi}{4}x) - S_m(x)$ in Abängigkeit vom mittleren Knoten m

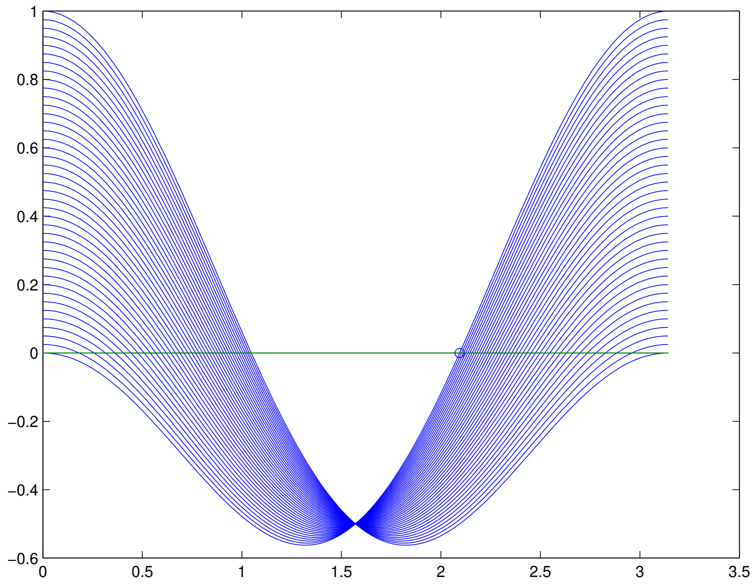

Abb. 5.2. $0.5(a\cos t + \cos 2t)$ mit $a = -1 : 0.05 : 1$

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`