Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 4: Übungen am 4. Mai 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P10. Um untere Schranken der Minimalabweichung $\rho_V(f) := \inf ||f - v||$ zu bestimmen, muß bei einem Haarschen Raum V der Dimension n ein Funktional l der Form

$$l(x) := \sum_{j=1}^{n+1} a_j x(t_j) \text{ mit } ||l|| = 1 \text{ und } l(v) = 0 \text{ für alle } v \in V := \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle \tag{L4.1}$$

bestimmt werden. Das läuft auf die Lösung eines $n{+}1 \times n{+}1$ linearen Gleichungssystems $\mathbf{Aa} = (1, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ mit $\mathbf{A}_{1k} := (1, -1, 1, \ldots, (-1)^n)$ und $\mathbf{A}_{jk} := v_{j-1}(t_k),\ j = 2, \ldots, n+1,\ k = 1, 2, \ldots, n+1$ hinaus: Die drei Gleichungssysteme lauten: Zuerst Matrix $\mathbf{A}$, dann $b = (1, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, dann Funktionswerte $f(t_k)$, dann Lösung $\mathbf{a}$.

$$n = 1: \begin{pmatrix} & & b & f & \mathbf{a} \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2/3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}, \quad n = 2: \begin{pmatrix} & & b & f & \mathbf{a} \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2.7586e-01 \\ -1/2 & -2/3 & -1 & 0 & \tan(\pi/8) & -5.1724e-01 \\ 1/2 & 2/5 & 1/3 & 0 & 1 & 2.0690e-01 \end{pmatrix},$$

$$n = 3: \begin{pmatrix} & & & & b & f & \mathbf{a} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2/5 \\ -1/2 & -3/5 & -3/4 & -1 & 0 & \tan(\pi/12) & -6.2963e-01 \\ 1/2 & 4.2857e-01 & 3.7500e-01 & 1/3 & 0 & \tan(\pi/6) & 8.4656e-02 \\ -1/6 & -1.7647e-01 & -1.8750e-01 & -1/4 & 0 & 1 & 1.1429e-01 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchten unteren Schranken sind $|l(f)| = 0.3333,\ 0.0074,\ 0.0055$, das sind die Lösungen $\mathbf{a}$, skalar multipliziert mit den Funktionswerten f. Rechnet man für drei Knoten (also $n = 2$) näherungsweise eine beste Approximation von f mittels

$$\mathit{Fehler}(t_k) := f(t_k) - v(t_k) = \varepsilon(-1)^k,\ k = 1, 2, 3 \tag{L4.2}$$

aus, so erhält man die in Abbildung L4.3 angegebene Lösung Fehler mit $v = -1.5037 v_1 - 1.4890 v_2$ und $\varepsilon = -0.0073518$, das ist (bis auf das Vorzeichen) die bereits oben angegebene untere Schranke 0.0074.

Aufgabe P11. Bei einer Halbnorm wird nicht $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$ verlangt, die anderen Normaxiome gelten unverändert. Ist $X = \mathrm{C}^1[a, b]$ mit einer beliebigen Norm $||\ \ ||$, so ist $||x||_H := ||x'||$ eine Halbnorm, denn aus $x' = 0$, folgt $x = \text{const}$ aber nicht notwendig $x = 0$. Für Halbnormen ist $||0|| = ||0x|| = 0||x|| = 0$, und daher auch $0 = ||0|| = ||x - x|| \le 2||x||$ also $||x|| \ge 0$. Ist $||\ \ ||_H$ eine Halbnorm und $||\ \ ||$ eine Norm, so ist $||x||_H + ||x|| = 0 \Rightarrow ||x||_H = 0, ||x|| = 0$, also wegen $||x|| = 0$ auch $x = 0$. Der Rest ist leicht nachzuprüfen.

Aufgabe P12. Eine Bézier-Kurve durch $n + 1$ Punkte a_j im $\mathbb{R}^d$ ist die Menge der Punkte $Be(x) := \sum_{j=0}^n a_j B_{j,n}(x),\ x \in [0, 1]$ mit den Bernsteinpolynomen $B_{j,n}$ vom Grad n als Koeffizienten. Die gegebenen Punkte a_j heißen auch *Kontrollpunkte*. Für die in der Aufgabe genannten Punkte ergibt sich das Bild L4.4.

Hausaufgaben:

Aufgabe 7. (a) Es ist $I_n f = \sum_{j=1}^n \ell_j f(t_j)$, also mit $||f||_\infty \le 1$ ist $|I_n f| = |\sum_{j=1}^n \ell_j f(t_j)| \le \sum_{j=1}^n |\ell_j||f(t_j)| \le \sum_{j=1}^n |\ell_j| \le ||\sum_{j=1}^n |\ell_j|\,||_\infty =: \lambda_n$, tabelliert in Tabelle L4.5, die Abbildungen sind in L4.6 und L4.7.

Aufgabe 8. (a,d) $l(x) = (4x - 1)/5$, $||f - l||_\infty = 0.4$, (b,d) $l(x) = (54x - 16)/55$, $||f - l||_\infty = 0.3091$, (c,d) $l(x) = x - (3/16)2^{1/3} \approx x - 0.236$, $||f - l||_\infty = 0.2362$. Die Zeichnung ist Abbildung L4.8.

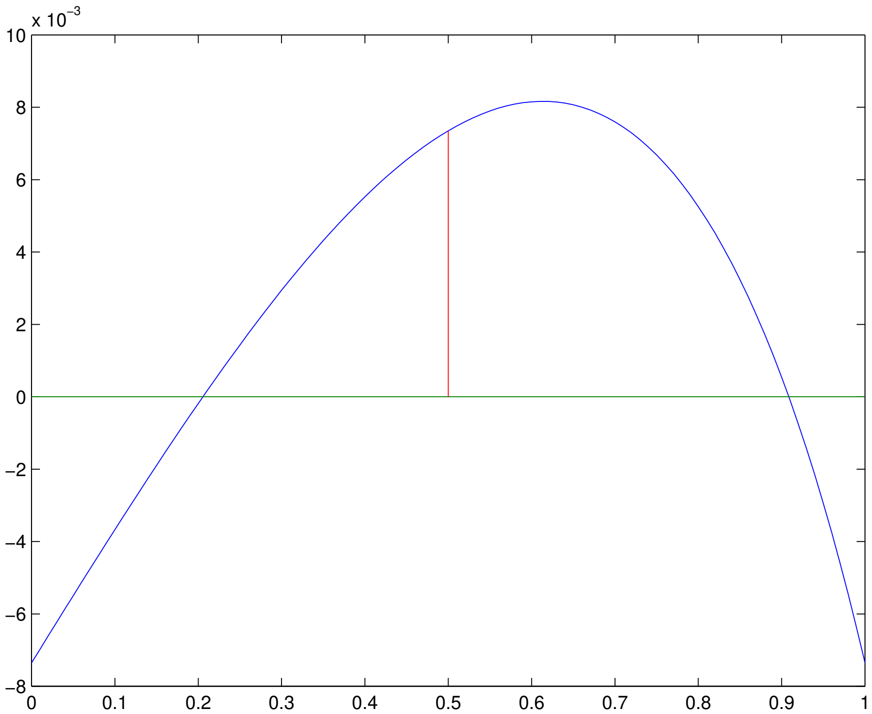

Abbildung L4.3. Lösung von (L4.2) mit $n = 2$, gezeichnet ist $Fehler := f - v$

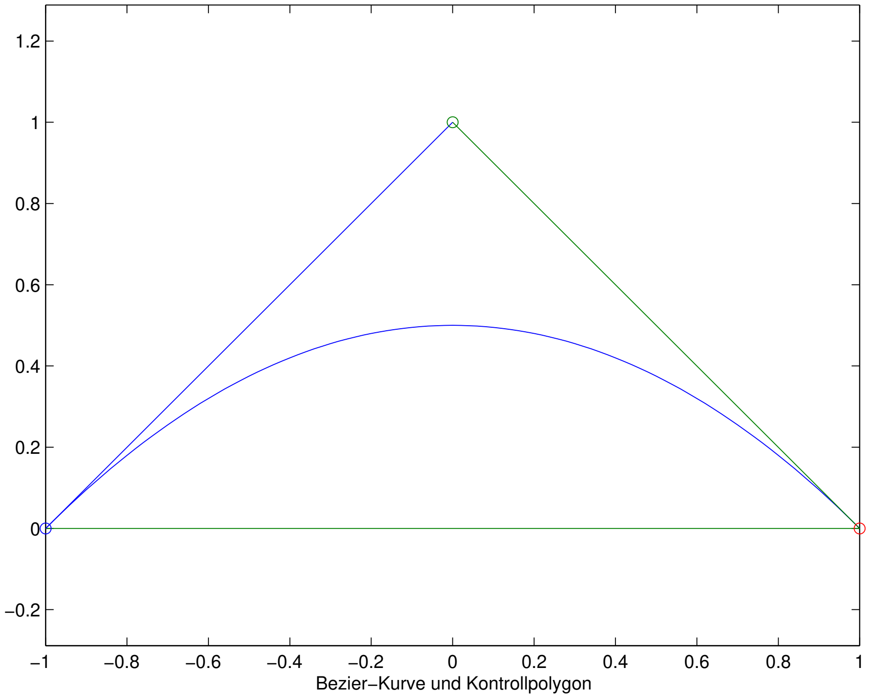

Abbildung L4.4. Bézierkurve und Kontrollpolygon mit drei Punkten

Tabelle L4.5. (b) Lebesgue-Konstanten für zwei Räume

n	(i)äquidistant	(i)Tschebyscheff	(ii)äquidistant	(ii)Tschebyscheff
2	1.0000e+00	1.4142e+00	1.0000e+00	3.3690e+00
3	1.2500e+00	1.6667e+00	2.1163e+00	8.9733e+00
4	1.6311e+00	1.8478e+00	2.7487e+00	5.9969e+00
5	2.2078e+00	1.9889e+00	1.0525e+01	1.3255e+01
6	3.1063e+00	2.1044e+00	1.2480e+01	9.0753e+00
7	4.5493e+00	2.2022e+00	4.5920e+01	1.7955e+01
8	6.9294e+00	2.2870e+00	5.5610e+01	1.2545e+01
9	1.0945e+01	2.3619e+00	1.9816e+02	2.2857e+01
10	1.7848e+01	2.4288e+00	2.4774e+02	1.6268e+01
11	2.9898e+01	2.4894e+00	8.4647e+02	2.7881e+01

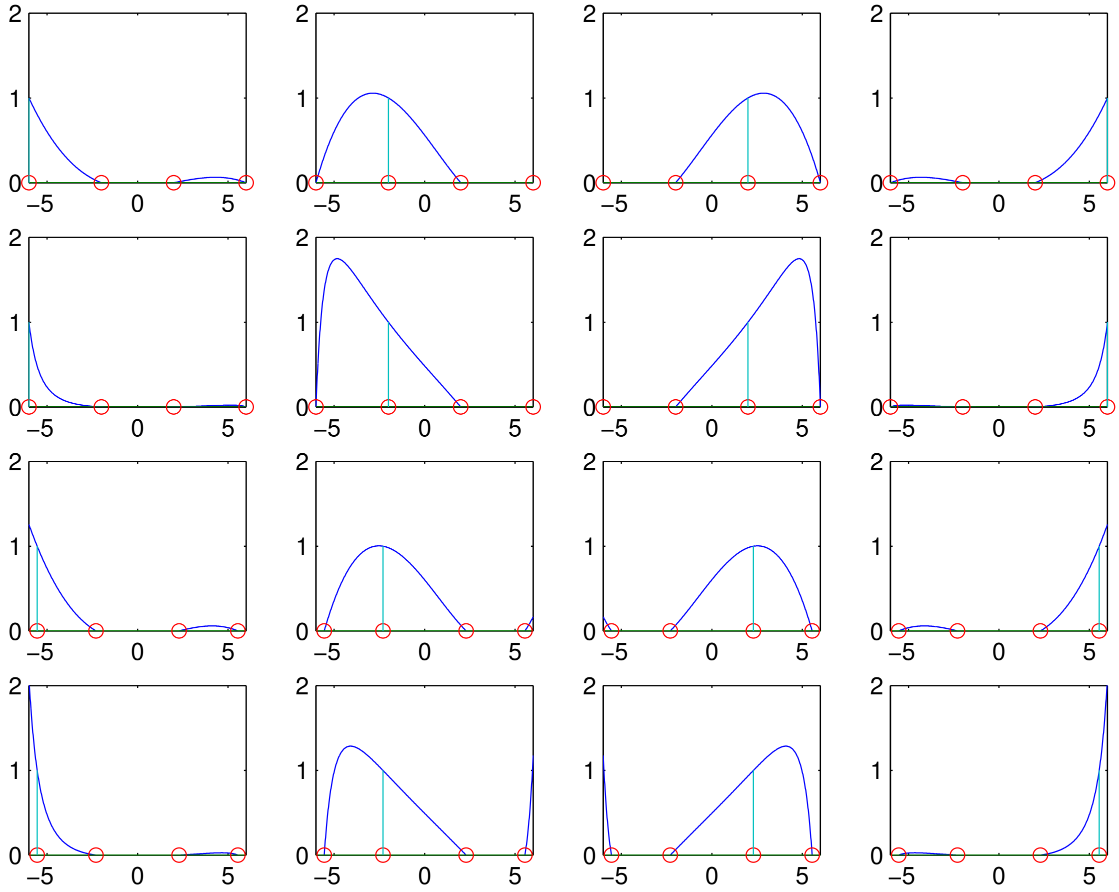

Abbildung L4.6. (c) Lagrange-Koeffizienten mit äquidistanten und T-Knoten in zwei Räumen

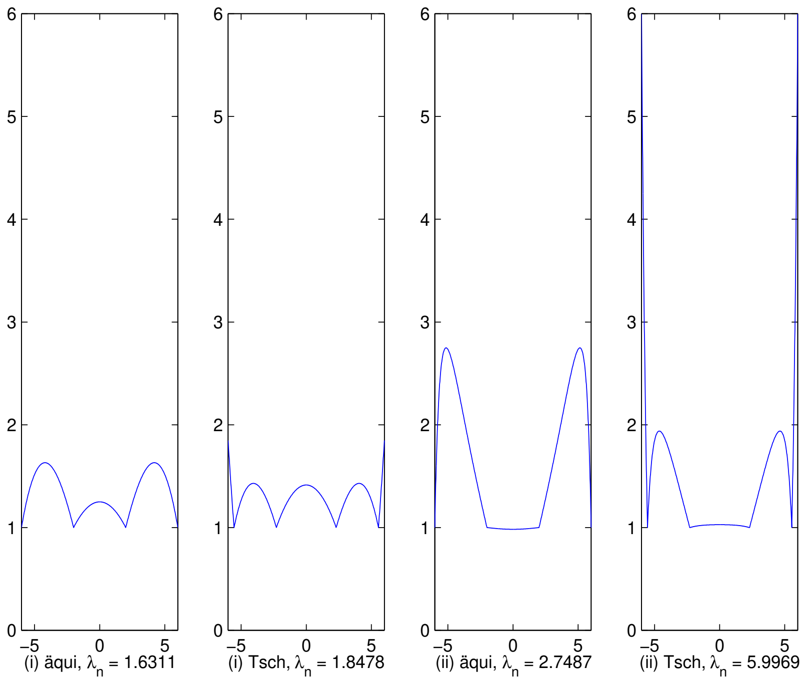

Abbildung L4.7. (d) Lebesgue-Funktionen mit äquidistanten und T-Knoten in zwei Räumen

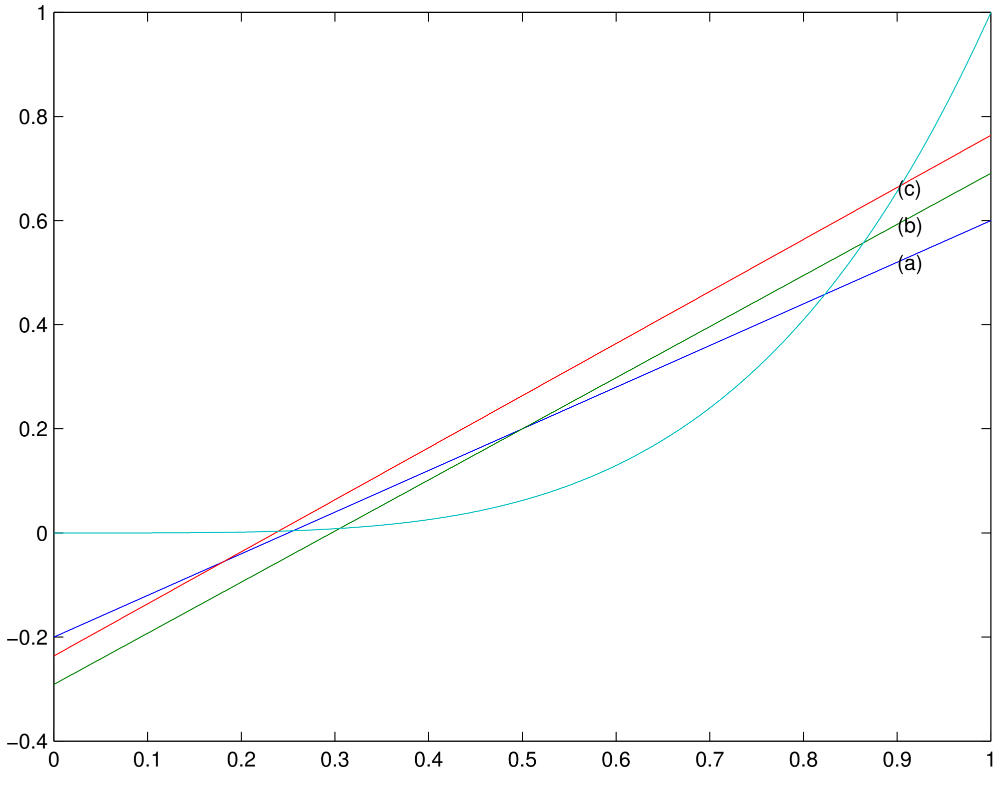

Abbildung L4.8. (e) Drei lineare Approximationen von x^4

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`