Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 3: Übungen am 27. April 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P7. *Operator* ist im Prinzip synomym für *Abbildung*. Meistens versteht man jedoch unter einem Operator eine Abbildung $T : X \to Y$ zwischen normierten (oder topologischen) Vektorräumen X, Y über $\mathbb{K}$ (oder einem anderen Bereich). Oft sogar eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Im weiteren sei $T : X \to Y$ immer (mindestens) eine Abbildung zwischen Vektorräumen, wobei diese Räume im Bedarfsfall noch weitere Eigenschaften haben.

(a) T heißt *linear* wenn

(L3.1) $$T(\alpha x) = \alpha T x \text{ und } T(x+y) = Tx + Ty \text{ für } x, y \in X \text{ und } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Die Klammern läßt man, wenn entbehrlich bei $T(x)$ immer weg. Beispiele sind beliebige Matrizen $T := \mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Ist $X = \mathrm{C}[a, b]$, so ist $Tx := \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$ mit $Y = \mathbb{K}$ ein *Integraloperator*, ein weiteres Beispiel einer linearen Abbildung.

(b) Ist T nicht linear, so ist die *Stetigkeit* wie üblich definiert und auch *punktweise* Stetigkeit kann definiert werden: T ist stetig an der Stelle x, wenn zu jeder Umgebung V von $T(x)$ die Menge $T^{-1}(V)$ eine Umgebung von x enthält. Die gesamte Abbildung T heißt auf X stetig, wenn T an jeder Stelle in X stetig ist. Ist T linear, so ist die Stetigkeit in normierten Räumen mit $\sup_{||x|| \le 1} ||T(x)|| =: c < \infty$ äquivalent. Man schreibt auch $||T|| := c$, wenn c endlich ist. Jede durch Matrizen definierte Abbildung ist stetig. Seien $X := \mathrm{C}^1[0, 1]$, $Y := \mathrm{C}[0, 1]$ und $T : X \to Y$ durch $Tx := \dot{x}$ definiert ($\dot{x} := \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$). Dann ist T linear, aber bei Benutzung der Maximumnorm in X und Y nicht stetig.

(c) In X, Y muß in irgendeiner Form die Relation $\ge$ (oder $\le$) definiert werden. Das geschieht im Regelfall mit Hilfe von konvexen*Kegeln*. Eine Menge $K \subset X$ heißt *Kegel*, wenn mit $x \in K$ auch $\alpha x \in K$ für alle $\alpha \ge 0$. Ein Kegel heißt (und ist) *konvex*, wenn $x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$. In einem Vektorraum mit konvexem Kegel K ist $x \le y$ definiert durch $y - x \in K$. Der Kegel K enthält also die nicht negativen Elemente. Beispiel im $\mathbb{R}^n$: $K =$ der erste *Orthant*: alle x mit nicht negativen Komponenten. Dieser Kegel ist konvex. Im $\mathbb{R}^2$ ist das der erste Quadrant. Betrachten wir im $\mathbb{R}^2$ die Quadranten 2 bis 4 als K, so definieren wir damit einen nicht konvexen Kegel. Ein Operator $T : X \to Y$ mit konvexen Kegeln K_X, K_Y heißt entsprechend *monoton*, wenn $x \le y \Rightarrow T(x) \le T(y)$ oder in anderer Bezeichnung $y - x \in K_X \Rightarrow Ty - Tx \in K_Y$. Die Konvexität des Kegels bewirkt die *Transitivität* der Ordnung: $x \ge y$, $y \ge z \Rightarrow x \ge z$. Verlangt man von der Ordnung auch noch $x \le y, y \le x \Rightarrow x = y$, so muß man von dem Kegel K folgendes verlangen: $x \in K$, $-x \in K \Rightarrow x = 0$. Derartige Kegel heißen *spitz*. Die obere Halbebene in $\mathbb{R}^2$ ist ein Beispiel für einen konvexen, nicht spitzen Kegel.

(d) Ein Operator T heißt *positiv*, wenn $x \in K_X \Rightarrow Tx \in K_Y$. Offensichtlich ist ein linearer Operator positiv genau dann, wenn er monoton ist. Der oben in (a) definierte Integraloperator ist positiv und damit auch monoton. Eine durch eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ definierte, lineare Abbildung ist positiv (monoton), wenn es in $\mathbf{A}$ keine negativen Einträge gibt. Dabei sind in $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ die Kegel definiert durch $K_X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$, $K_Y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{y} \ge \mathbf{0}\}$.

Aufgabe P8.

(a) Sei $V \subset \mathrm{C}[a, b]$ ein n-dimensionaler Raum, in dem jedes Interpolationsproblem (3.2) eindeutig lösbar ist. Vergleichen Sie die Definition 3.1. Bei gegebenen, paarweise verschiedenen Punkten t_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ ist dann jeder stetigen Funktion $f \in \mathrm{C}[a, b]$ das eindeutig bestimmte Element $v \in V$, das $v(t_j) = f(t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ erfüllt, zugeordnet. Diese Abbildung $I_n : \mathrm{C}[a, b] \to V$ heißt *Interpolationsoperator*. Beispiel: $V = \Pi_{n-1}$, der Raum aller Polynome bis zum Grad $n - 1$.

(b) In diesem Fall arbeiten wir zuerst in einem Vektorraum $(X, <\,,\,>)$ mit Skalarprodukt. Die dadurch induzierte Norm sei $||\quad||$. Ist V wieder ein endlich-dimensionaler Teilraum von X, so gibt es zu jedem

$x \in X$ genau ein $\hat{v} \in V$ mit $||x - \hat{v}|| \le ||x - v||$ für alle $v \in V$. Wir haben also wieder eine Abbildung $P : X \to V$, die *Projektion* von x auf V definiert. Sie ist charakterisiert durch $< x - \hat{v}, v >= 0$ für alle $v \in V$, d. h., $x - \hat{v}$ steht senkrecht auf V. Diese Abbildung hat für $v \in V$ die Eigenschaft $Pv = v$, oder in anderer Schreibweise $P(Pf) = Pf$ oder $P^2 = P$. Alle Operatoren mit dieser Eigenschaft nennt man *Projektionsoperatoren*. Der oben definierte Interpolationsoperator I_n hat auch diese Eigenschaft, nämlich $I_n p = p$ für alle $p \in \Pi_{n-1}$.

(c) Sei $[a, b]$ ein beliebiges Intervall mit $a < b$. Offensichtlich ist

$$1 = \Big(\frac{x - a + b - x}{b - a}\Big)^n = \Big(\frac{1}{b - a}\Big)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - a)^k (b - x)^{n-k} =: \sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x). \tag{L3.2}$$

Die so definierten Polynome $B_{k,n}$ heißen *Bernsteinpolynome*. Sie haben für alle $x \in [a, b]$ die Eigenschaften $0 \le B_{k,n} \le 1$ und $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n} = 1$. Sind also $a_k \in \mathbb{R}^d$, $k = 0, 1, \ldots, n$ irgendwelche Vektoren, so ist $S(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k,n}(x)$ für jedes $x \in [a, b]$ eine Konvexkombination der Vektoren a_k. Die Summe S liegt also immer in der konvexen Hülle der Vektoren a_k.

(d) Ersetzt man für beliebige, stetige Funktionen $f \in \mathrm{C}[a, b]$ die obigen Punkte a_k durch $f(a + k\frac{b-a}{n})$, so erhält man wieder eine Abbildung $B_n : \mathrm{C}[a, b] \to \Pi_n$, den *Bernsteinoperator*. Ist $f(x) = x^3, a = 0, b = 1$, so ist $B_3(f) = x(2x^2 + 6x + 1)/9 \ne f$, d. h. B_n ist kein Projektionsoperator.

Aufgabe P9. (a) V hat die Dimension k. (b) Alle Funktionen in $\mathrm{C}(B)$ sind stetig, weil alle Teilmengen von B offen sind.

Hausaufgaben:

Aufgabe 5. (a) Sei V ein Haarscher Raum und ein $v \in V$ habe mindestens n Nullstellen, also $v(t_j) = 0, j = 1, 2, \ldots, n$. Da V ein Haarscher Raum ist, so ist $v = 0$ die einzige, mögliche Lösung. (b) Habe jedes $v \ne 0$ höchstens $n - 1$ Nullstellen. Hat (3.2) mehrere Lösungen, sagen wir v und w, so hat $v - w$ mindesten n Nullstellen, also $v = w$. Hat (3.2) gar keine Lösungen, so hat das homogene System $v(t_j) = 0, j = 1, 2, \ldots, n$ eine nichttriviale Lösung. Ein Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 6. (a) Wir definieren Polynome $L \in \Pi_n$, $L_k \in \Pi_{n-1}$ durch

$$L(t) := \prod_{j=1}^{n} (t - \tau_j), \quad L_k(t) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j}, \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{L3.3}$$

Die L_k sind die gewöhnlichen *Lagrange-Koeffizienten* in bezug auf die Knoten t_j. Es gilt für jedes $v \in V$:

$$v(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j(t) = \frac{p(t)}{L(t)}, \quad p \in \Pi_{n-1}. \tag{L3.4}$$

Da der Nenner L keine und der Zähler p höchstens $n - 1$ Nullstellen hat, ist die Behauptung bewiesen. (b) Die gesuchten Lagrange-Koeffizienten ℓ_k müssen die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\ell_k \in V \text{ mit } \ell_k(t_j) = \delta_{jk}, \; j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{L3.5}$$

Setzen wir in (L3.4) für $p = L_k$ ein, so erhalten wir

$$v(t_j) = L_k(t_j)/L(t_j) = \delta_{kj}/L(t_j).$$

Daraus folgt

$$\ell_k = L(t_k)\frac{L_k}{L} \;\Rightarrow\; \text{Lösung des Interpolationsproblems } v = \sum_{k=1}^{n} y_k \ell_k. \tag{L3.6}$$

(c) Die Matrix hat die Elemente $1/(t_j - \tau_k)$. Das ist eine sogenannte *Cauchy-Matrix*, mit dem Spezialfall $t_j := j - 1$, $\tau_k := -k$, der *Hilbert-Matrix* mit den Elementen $1/(j + k - 1)$, $1 \le j, k \le n$.

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`