Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 2: Übungen am 20. April 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben: ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Aufgabe P4. Metriken brauchen keine lineare Struktur. Metriken auf Vektorräumen sind i. a. nicht translationsinvariant. Die Definitheit: $\rho(x, y) > 0$ genau für $x \neq y$ und die Dreiecksungleichung sind beiden Begriffen gemeinsam.

Aufgabe P5. Wir setzen $p(x) := a + bx$ und erhalten dann

$$\begin{aligned} f(0) - p(0) &= -\varepsilon, \\ f(\xi) - p(\xi) &= \varepsilon, \\ f(1) - p(1) &= -\varepsilon. \end{aligned}$$

Wenn wir also ξ kennen würden, wäre das ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die drei Unbekannten a, b, ε. Aus der ersten und dritten Gleichung gewinnen wir $f(0) - p(0) = -a = f(1) - p(1) = 1 - a - b \Rightarrow b = 1$. Zur Bestimmung von ξ verwenden wir, daß der *Fehler* $f - p$ bei ξ ein Maximum hat. Das ergibt eine zusätzliche, nichtlineare Gleichung

$$f'(\xi) - p'(\xi) = 0.$$

Aus dieser Gleichung gewinnen wir $\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}\xi) - b = 0$. Da $b = 1$, ist $\xi = \frac{2}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi} \approx 0.56066418057989$. Aus der ersten und zweiten Gleichung erhält man dann $a = \varepsilon = f(\xi) - p(\xi) = \sin(\frac{\pi}{2}\xi) - \varepsilon - \xi$, also $\varepsilon = \frac{1}{2}(\sin(\frac{\pi}{2}\xi) - \xi) \approx 0.10525683117651$.

Aufgabe P6. (a) $||f|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||f(x)||_Y}{||x||_X}$. (b) Sei $Y \subset X$ ein eigentlicher Teilvektorraum des normierten Raumes X und sei $y^* : Y \to \mathbb{K}$ ein lineares, stetiges Funktional, in anderer Bezeichnung $y^* \in Y^*$. Dann existiert $x^* \in X^*$ mit $||y^*|| = ||x^*||$ und $x^*(y) = y^*(y)$ für $y \in Y$.

Hausaufgaben: ($\rho_V(f) := \inf_{v \in V} ||f - v||$, *Minimalabweichung* zwischen f und V)

Aufgabe 3. (i) Sei X gleichmäßig konvex, es gilt also (2.1). Aus $||\frac{1}{2}(x + y)|| = 1$ folgt dann $||x - y|| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, also $x = y$. (ii) Sei X endlich-dimensional und strikt konvex und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren $S := \{(x, y) : ||x|| = ||y|| = 1, \ ||x - y|| \geq \varepsilon\}$. Die Menge S ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Die Abbildung $F(x, y) := 1 - ||\frac{1}{2}(x + y)||$ ist stetig auf S und wegen der strikten Konvexität positiv auf S wegen $||\frac{1}{2}(x + y)|| < 1$ wenn $x \neq y$ und $||x|| = ||y|| = 1$. Daher hat F auf S ein positives Minimum $\delta := \min_{(x,y) \in S} F(x, y)$. Wir erhalten also

$$||x - y|| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1 - ||\frac{1}{2}(x + y)|| \geq \delta$$

oder in einer anderen Form

$$||\frac{1}{2}(x + y)|| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad ||x - y|| < \varepsilon.$$

Das ist gerade die gewünschte gleichmäßige strikte Normeigenschaft. (iii) Pflaumann & Unger, [1974, S. 135–137]*)

Aufgabe 4. (a) Wir konstruieren ein Funktional

(L2.1) $$\ell(f) := a_0 f(0) + a_{0.5} f(0.5) + a_1 f(1), \quad |a_0| + |a_{0.5}| + |a_1| = 1$$

---

*) E. Pflaumann & H. Unger: Funktionalanalysis I, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1974, 240 S.

mit den Eigenschaften

$$\ell(p) = 0 \text{ für alle } p \in \Pi_1. \tag{L2.2}$$

Die letzte Bedingung in (L2.1) ist äquivalent zu $||\ell|| = 1$. Um (L2.2) zu erfüllen, genügt es, diese Bedingung für alle Elemente einer Basis zu erfüllen. Wir wählen als Basiselemente $p := 1$, $p := x$. Das ergibt

$$\ell(1) = a_0 + a_{0.5} + a_1 = 0, \quad \ell(x) = 0.5a_{0.5} + a_1 = 0. \tag{L2.3}$$

Subtrahieren wir diese Gleichungen, so erhalten wir $a_0 + 0.5a_{0.5} = 0$ oder $a_0 = -0.5a_{0.5} = a_1$. Setzen wir $a_0 = a_1 = 0.25, a_{0.5} = -0.5$, haben wir alle Gleichungen erfüllt. Das Funktional hat die endgültige Form

$$\ell(f) = 0.25f(0) - 0.5f(0.5) + 0.25f(1). \tag{L2.4}$$

Setzen wir jetzt $f_0(x) := \sin(\frac{\pi}{2}x)$ in ℓ ein, so erhalten wir die untere Schranke

$$\begin{aligned}(0.10525683117651 =)\rho_{\Pi_1}(f_0) \geq |\ell(f_0)| = |0.25f_0(0) - 0.5f_0(0.5) + 0.25f_0(1)| = \\ |-0.5\sin(\pi/4) + 0.25| = |-0.10355339059327|.\end{aligned} \tag{L2.5}$$

Dieselben Ideen führen bei $p \in \Pi_2$ auf

$$\ell(f) := a_0f(0) + a_1f(1/3) + a_2f(2/3) + a_3f(1), \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1, \tag{L2.6}$$

$$\ell(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, \tag{L2.7}$$

$$\ell(x) = 1/3a_1 + 2/3a_2 + a_3 = 0, \tag{L2.8}$$

$$\ell(x(x-1)) = -2/9a_1 - 2/9a_2 = 0. \tag{L2.9}$$

Die Lösung ist

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1/8, -3/8, 3/8, -1/8)$$

und

$$\begin{aligned}\rho_{\Pi_2}(f_0) \geq |\ell(f_0)| =& |0.125f_0(0) - 0.375f_0(1/3) + 0.375f_0(2/3) - 0.125f_0(1)| = \\ & |-0.375\sin(\pi/6) + 0.375\sin(2\pi/6) - 0.125| = |0.01225952641916|.\end{aligned} \tag{L2.10}$$