Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 1: Übungen am 13. April 1999

Lösungshinweise

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P1. (a) $f = \sin$. Entscheidend ist die Reduktion des Definitionsbereich auf $[0, \pi/2]$ oder $[0, \pi/4]$. Im zweiten Fall ist die Winkelverdopelungsformel $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi$ zu verwenden. (b) $f(x) = \sqrt{x}$. In diesem Fall ist es zweckmäßig anzunehmen, daß x binär als Gleitkommazahl dargestellt wird: $x = m \cdot 2^s = a_1.a_2 \ldots a_t \cdot 2^s$ mit $a_j \in \{0, 1\}$ und $a_1 = 1$. Dann ist $1 \le m < 2$ und

$$\sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{m} \cdot 2^{s/2} & \text{falls } s \text{ gerade}, \\ \sqrt{2m} \cdot 2^{(s-1)/2} & \text{falls } s \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{L1.1}$$

Das Wurzelziehen kann also auf $[1, 4]$ eingeschränkt werden. Wegen $\sqrt{1/x} = \sqrt{x}/x$ genügt es, sich auf $[0.25, 1]$ einzuschränken. Auf dem reduzierten Bereich können Polynome, Splines oder auch andere Funktionen zur Approximation verwendet werden.

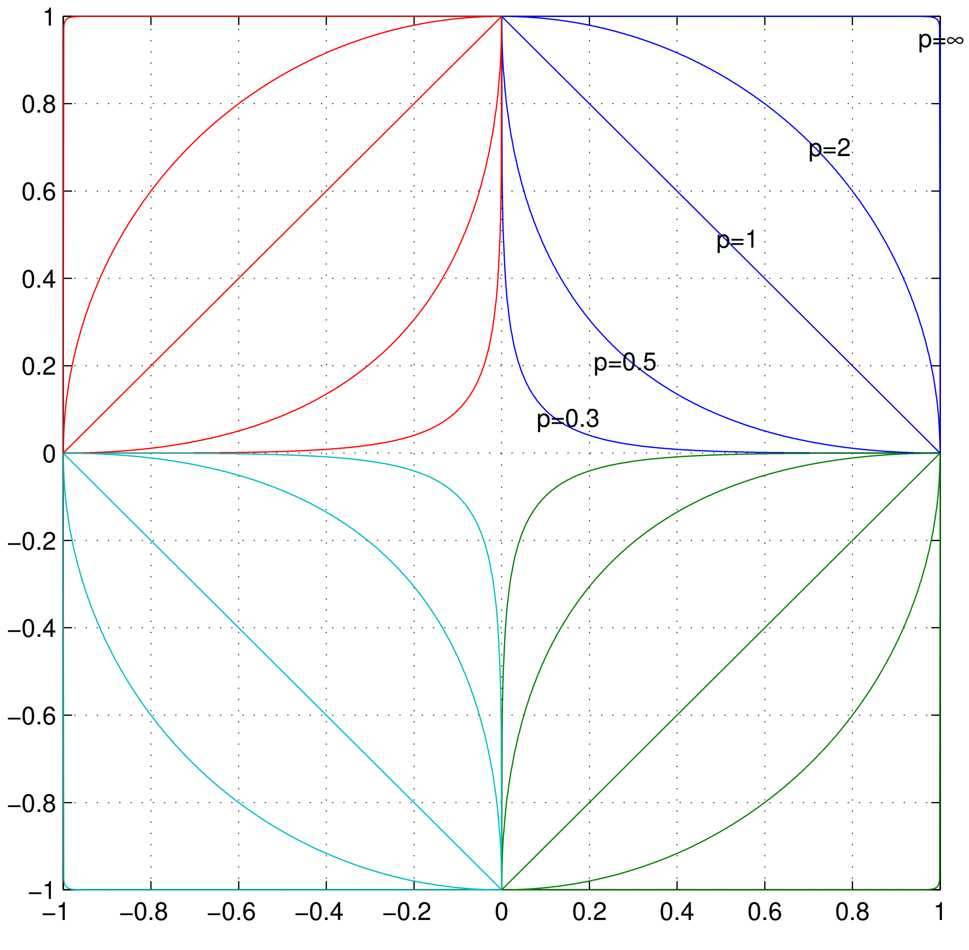

Abbildung L1.2. Norm- und Nichtnormkreise.

Aufgabe P2. Tschebyscheff-Polynome, kurz T-Polynome haben alle ihre Nullstellen in $[-1, 1]$. Die Extremwerte sind abwechselnd Minima und Maxima von gleicher Höhe. Sie sind orthogonale Polynome bezüglich der Gewichtsfunktion $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ und des Skalarprodukts $< f, g >:= \int_{-1}^{1} w(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, und sie genügen daher einer Dreitermrekursion.

Aufgabe P3. Das ist die sogenannte *chordale Metrik*, meistens in $\mathbb{C}$ über die *stereographische Projektion* definiert. Die Dreiecksungleichung gilt, weil es sich um einen gewöhnlichen Abstand im $\mathbb{R}^2$ handelt. Es ist immer $\chi(x, y) \le 1$. Daher ist χ keine Norm.

Hausaufgaben:

Aufgabe 1. Normkugeln $K := \{x : ||x|| \le 1\}$ sind konvex wegen der Dreiecksungleichung. In dem Bild L1.2 sieht man, daß Werte $p < 1$ nicht zu konvexen Figuren führen, also keine Normen definieren. Für $p \ge 1$ ist die Dreiecksungleichung gerade die *Minkowskische Ungleichung*. Für einen Beweis, daß $0 < p < 1$ keine Norm definiert, genügt es zu zeigen, daß $f(1/2) < 1/2$ mit $f(x) := \sqrt[p]{1-x^p}$. Es ist $f(1/2) = \sqrt[p]{1-(1/2)^p} < 1/2$, denn $1-(1/2)^p < (1/2)^p$ oder $1 < 2^{1-p}$. Diese Ungleichung ist wegen $1 - p > 0$ aber richtig.

Aufgabe 2. Wegen $z = x + \mathrm{i}y = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ ist $w = x + \mathrm{i}y(1-2\rho) = \cos\varphi + \mathrm{i}(1-2\rho)\sin\varphi$. Das ist genau die Parameterdarstellung einer Ellipse mit den angegebenen Achsen. Das zu lösende Abstandsproblem

$$f(u, v) := |u - v| = \min, \quad u \in E_1,\ v \in E_2 \tag{L1.3}$$

ist am einfachsten durch Probieren näherungsweise zu lösen. Man definiert für eine gegebene Diskretisierung der Ränder $E_1(j)$, $E_2(k)$ eine Matrix $W(j, k) := |E_1(j) - E_2(k)|$ und sucht in ihr das kleinste Element. Bei $j, k = 1, 2, \dots, 101$ erhält man $\min W(j, k) = W(97, 5) = 0.1980$ und $E_1(97) = -0.0990 + 0.3766\mathrm{i}, E_2(5) = 0.0990 + 0.3766\mathrm{i}$. Auch eine analytische Lösung ist möglich. Wegen der Symmetrie genügt es, auf der Ellipse E_1 denjenigen Punkt zu finden, der am weitesten rechts liegt, oder etwas mathematischer ausgedrückt, der den größten Realteil hat. Der Realteil der Punkte auf E_1 hat die Form

$$F(\varphi) := \frac{1}{4}\big(3\cos(\frac{\pi}{6} + \varphi) + \cos(\frac{\pi}{6} - \varphi)\big) - 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{L1.4}$$

Der Imaginärteil der Punkte auf E_1 hat die Form

$$G(\varphi) := \frac{1}{4}\big(3\sin(\frac{\pi}{6} + \varphi) + \sin(\frac{\pi}{6} - \varphi)\big), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{L1.5}$$

Das Maximum von F wird unter Anwendung der üblichen Regeln ($F' = 0$ und Additionstheoreme) erreicht, wenn

$$\tan\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{6} \approx -0.2887 \Rightarrow \varphi \approx -0.2810 \approx -16.1021 \text{ Grad } \approx 343.8979 \text{ Grad.} \tag{L1.6}$$

Für diesen Wert ist

$$F(\varphi) \approx -0.0986,\ G(\varphi) \approx 0.3603 \ \Rightarrow\ f(u, v) = 2|F(\varphi)| \approx 0.1972. \tag{L1.7}$$

Die obige Näherungsrechnung liefert, wie zu erwarten, etwa zwei richtige Stellen.

Übungsaufgaben, Lösungshinweise (mit einiger Verzögerung), Programme und sonstige Informationen zu den Übungen sind auch in den web-Seiten mit folgender Adresse abrufbar:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`