Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 10: Ausgabetermin am 15. Juni 1999

Abgabetermin: am 22. Juni 1999, vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P28. (a) Welche besonderen Eigenschaften hat die endliche Fourierreihe t_n in bezug auf die zugrundeliegende Funktion f. (b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $f(x) = x$. Wie ist hier der Definitionsbereich zu wählen, und wie sieht f als Funktion auf $\mathbb{R}$ aus? (c) Dasselbe für $f(x) = \operatorname{sign}(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Aufgabe P29. (a) Was verstehen Sie unter der diskreten Fourierreihe? Was bedeutet (b1) FFT wörtlich und (b2) inhaltlich?

Aufgabe P30. Wie sieht das trigonometrische Interpolationsproblem aus, und wie löst man es?

Hausaufgaben:

Aufgabe 19. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von

$$\text{(a)}\quad f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi], \qquad \text{(b)}\quad f(x) = x^2, x \in]0, 2\pi[$$

mit periodischer Fortsetzung auf die ganze Achse. Ist t_n die entsprechende trigonometrische Summe (mit $2n+1$ Termen), so zeichnen Sie neben f in Fall (a) t_1, in Fall (b) t_5 in eine Figur. Was können Sie über $t_n(0)$ in zweiten Fall sagen?

Aufgabe 20. Wir betrachten die Auswertung trigonometrischer Polynome $t_n(x)$ in der folgenden Form:

$$t_n(x_k) := \sum_{j=0}^{n-1} c_j w_n^{jk}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n), \quad x_k = 2k\pi/n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{10.1}$$

wobei die Auswertung für alle k vorgenommen werden soll und die (komplexen) Zahlen c_j bekannt sind. Zeigen Sie, daß bei geradem $n = 2m$ die Auswertung (10.1) zurückgeführt werden kann auf zwei Summen derselben Form aber halber Länge. Man verwende dazu zwei Ansätze: (a) Man berechne $t_n(x_k)$ für gerade und ungerade k getrennt. (b) Man sortiere die Summe nach geraden und ungeraden Indizes j.

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`