Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 9: Ausgabetermin am 8. Juni 1999

Abgabetermin: am 15. Juni 1999, vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P25. Welcher Art ist die Schwierigkeit bei der Anwendung des Alternantensatzes auf periodische Funktionen?

Aufgabe P26. In welchem Sinne sind die T-Polynome (s.u.) orthogonal?

Aufgabe P27. Wenn Sie hinreichend viele T-Polynome in dieselbe Zeichnung zeichnen, welche Fälle sind dann denkbar, und welcher Fall tritt tatsächlich ein?

Hausaufgaben:

Definition. Die Funktionen T_n, definiert durch $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $x \in [-1, 1]$ heißen *Tschebyscheff-Polynome* (T-Polynome).
In der Vorlesung (oder in den Anfängervorlesungen) wurde gezeigt, daß es sich tatsächlich um Polynome handelt, die also für alle $x \in \mathbb{R}$ (sogar alle $x \in \mathbb{C}$) definiert sind.

Aufgabe 17. (a) Beweisen Sie:

$$T_n(x) = \cosh(n \operatorname{arccosh}(x)), \quad x \geq 1. \tag{9.1}$$

(b) Fassen Sie die in der Vorlesung hergeleitete Rekursionsformel

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{9.2}$$

als Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten, von einem Parameter x abhängigen Koeffizienten auf, und finden Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzengleichung. Lösungstechnik: Man bestimme das charakteristische Polynom und seine Nullstellen $\lambda_{1,2}$. Dann ist (bei verschiedenen λs) die allgemeine Lösung $T_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$, bei gleichen λs ist $T_n = (a + nb)\lambda^n$.

Definition. Eine Alternante heißt *gut*, wenn sie optisch fehlerfrei ist, wenn also vom Auge aus der Zeichnung der Fehlerfunktion auf einem Bildschirm kein Fehler entdeckt werden kann.

Aufgabe 18. Berechnen sie mit einem gewöhnlichen polynomialen Ansatz eine *gute* Alternante mit $n+1 = 6$ Punkten (n ist die Dimension des Raumes) für die fünf Testfunktionen
(1) Glockenkurve $\exp(-x^2)$, $x \in [0, 1]$,
(2) Besselfunktion J_1, $x \in [0, 7]$,
(3) $x \sin(1/x)$, $x \in [0.05, 1]$,
(4) $\sin \pi/4x$, $x \in [0, 1]$,
(5) $\tan \pi/4x$, $x \in [0, 1]$.
Protokollieren Sie: die Anzahl der Iterationen (Anzahl der Verbesserungen der Alternantenpunkte), die Alternantenpunkte, die sich ergebenden oberen und unteren Schranken für die Minimalabweichungen. Benutzen Sie die interaktiven MATLAB-Programme `l09remez*`. Die Gebrauchsanweisung steht in `l09remez.info`, zu finden unter der unten angegebenen Adresse. Testfunktion Nr. 3 ist heikel. Verwenden Sie nicht zuviel Zeit für dieses Beispiel.

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`