Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 8: Ausgabetermin am 1. Juni 1999

Abgabetermin: am 8. Juni 1999, vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P22. Zeigen Sie an einem Bild an der Tafel die Wirkungsweise des Satzes von de la Vallée-Poussin.

Aufgabe P23. Zeigen Sie an der Tafel wie im Prinzip der Remez-Algorithmus funktioniert.

Aufgabe P24. Ist in dem Satz über die strenge Eindeutigkeit eine kleine oder eine große Konstante γ *gut*?

Hausaufgaben:

Aufgabe 15. Sei in einem Haarschen Raum V der Dimension n bei $n+1$ gegebenen, paarweise verschiedenen Punkten $x_k,\ k=0,1,\ldots,n$ das lineare Gleichungssystem

$$\varepsilon(x_k)=(-1)^k a_0;\quad \varepsilon(x_k):=y_k-\sum_{j=1}^{n} a_j v_j(x_k),\ k=0,1,\ldots,n \tag{8.1}$$

zu lösen mit $V=<v_1,v_2,\ldots,v_n>$ und beliebigen Zahlen y_k. (a) Zeigen Sie, daß die Lösung auf zwei Interpolationsprobleme zurückgeführt werden kann, nämlich

$$u(x_k)=y_k,\quad w(x_k)=(-1)^k,\ k=0,1,\ldots,n,\ k\neq k_0 \tag{8.2}$$

mit einem beliebig gewählten $0\le k_0\le n$. Bestimmen Sie die Lösung v als Linearkombination von u,w. (b) Warum ist diese Technik interessant? Bewertung von (b): 1/5 der Punkte.

Definition. Sei $V\subset \mathrm{C}(B)$ ein endlich dimensionaler Haarscher Teilraum, $f\in X$ und $\hat v$ eine b. A. von f. Gibt es eine Konstante $\gamma=\gamma(f)>0$ mit

$$||f-v||_\infty \ge ||f-\hat v||_\infty+\gamma||\hat v-v||_\infty \text{ für alle } v\in V, \tag{8.3}$$

so heißt $\hat v$ eine *streng eindeutige* b. A. von f und γ heißt *strenge Eindeutigkeitskonstante*.

Aufgabe 16. Gelte (8.3). (a) Zeigen Sie $\gamma\le 1$. (b) Zeigen Sie (mit dem Alternantensatz), daß $\hat v(x):=x-1/8$ die beste lineare Approximation von $f(x)=x^2$ auf $[0,1]$ ist, und berechnen Sie $\rho_V(f)$. (c) Berechnen Sie für den Fall (b) die Konstante γ aus (8.3), ggf. auch numerisch. Punkte: (a): 3/10, (b): 1/10, (c) 6/10.

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`