Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 7: Ausgabetermin am 18. Mai 1999

Abgabetermin: am 1. Juni 1999, vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P19. Wir wiederholen die Rekursionsformel für die B-Splines in einer leicht ausführbaren Form: (das Manuskript, S. 28 gibt z. B. keine explizite Formel für B_{0i}. Wir verwenden dabei (in leichter Abweichung vom Manuskript) die Bezeichnung $B_{jk}(x)$. Dabei wird j für die laufende Numerierung und k für die jeweilige Ordnung verwendet. Die $n+k$ Splineknoten sind dabei $t_1, t_2, \ldots, t_{n+k}$ mit $t_j < t_{j+k}$. Die Rekursion lautet:

$$\begin{aligned} B_{j1}(x) &:= \begin{cases} 1, & \text{für } t_j \le x < t_{j+1}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ B_{jk}(x) &= \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1}(x) + \frac{t_{j+k} - x}{t_{j+k} - t_{j+1}} B_{j+1,k-1}(x). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ist in der obigen Formel (7.1) ist bei $B_{j,k-1} = 0$, oder $B_{j+1,k-1} = 0$ der gesamte Summand wegzulassen, der Faktor spielt also dann keine Rolle. Man beachte, daß eine gewisse Willkühr in der Definition von $B_{j1}(x)$ vorkommt in bezug auf die Festlegung der Randwerte. Das führt dazu, daß unstetige Splines rechtsseitig stetig sind. Will man $B_{jk}(x)$ für ein vorgegebenes x, für das $B_{jk}(x)$ stetig ist, berechnen, so bestimme man zuerst j so, daß $t_j \le x < t_{j+1}$ gilt. Mit diesem (eindeutigen) j führe man dann obige Rekursion durch in der Reihenfolge $0, B_{j1}, 0; 0, B_{j-1,2}, B_{j2}, 0; \ldots; 0, B_{j-k+1,k}, B_{j-k+2,k}, \ldots, B_{jk}, 0$ (Argument x weggelassen). Die Nullen sollen daran erinnern, daß links und rechts entsprechend Nullen in der Rekursion eingesetzt werden müssen.
Berechnen Sie alle linearen B-Splines (also $k = 2$) für die Splineknotenfolge $[0, 0.5, 0.5, 1]$ nach der obigen Rekursion. Zuerst ist also $x \in [t_1, t_2[= [0, 0.5[$, und man muß $B_{11}, (B_{21} = 0); B_{12}$ berechnen. Für $x \in [t_3, t_4[= [0.5, 1[$ sind $B_{31}, (B_{21} = 0); B_{22}$ zu berechnen.

Aufgabe P20. Bildet der lineare Raum der B-Splines ein Haarsches System?

Aufgabe P21. In welchen Räumen gilt die Parallelogrammgleichung $||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2||f||^2 + 2||g||^2$? Warum heißt sie so? Berechnen Sie die vorkommenden Ausdrücke für $f(t) = 1, g(t) = t,\ t \in [0,1]$ und T-Norm $||\quad||_\infty$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 13. Mit $t_j,\ , j = 1, 2, \ldots, n+k$ bezeichnen wir *Splineknoten* von Splines der *Ordnung* k, und mit $\tau_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ bezeichnen wir *Interpolationsknoten*. Wir setzen voraus, daß die Splineknoten nicht fallend geordnet sind mit $t_j < t_{j+k},\ j = 1, 2, \ldots, n$ und die Interpolationsknoten aufsteigend geordnet sind: $\tau_j < \tau_{j+1},\ j = 1, 2, \ldots, n-1$. (a) Bei gegebenen Splineknoten definieren wir Interpolationsknoten durch

$$\tau_j = \frac{t_{j+1} + t_{j+2} + \cdots + t_{j+k-1}}{k-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.2}$$

(b) Bei gegebenen Interpolationsknoten definieren wir Splineknoten durch

$$\begin{gathered} t_{j+k} = \frac{\tau_{j+1} + \tau_{j+2} + \cdots + \tau_{j+k-1}}{k-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-k, \\ t_1 = t_2 = \cdots = t_k = \tau_1, \quad t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = t_{n+k} = \tau_n. \end{gathered} \tag{7.3}$$

(c) Für gerade Splineordnung k (also für Splines mit ungeradem Polynomgrad) definieren wir für gegebene Interpolationsknoten $\tau_j \in [a, b]$ Splineknoten t_j nach folgendem Schema:

$$\begin{gathered} t_{j+k} = \tau_{j+k/2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-k, \\ t_1 = t_2 = \cdots = t_k = a, \quad t_{n+1} = t_{n+2} \cdots = t_{n+k} = b. \end{gathered} \tag{7.4}$$

Untersuchen Sie, in wie weit in allen drei Fällen die Bedingungen von Schoenberg & Whitney eingehalten werden. Zeigen Sie dazu, daß diese Bedingungen mit der hier gebrauchten Terminologie in die folgende Form gebracht werden können:

$$t_j < \tau_j < t_{j+k}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Aufgabe 14. Berechnen Sie für Splineordnungen $3 \le k \le 6$ und $2 \le n \le 8$ Interpolationsbedingungen den Approximationsfehler des interpolierenden B-Splines (gemessen in der Maximumnorm), der die folgenden Funktionen interpoliert:

$$\text{(a) } f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x),\ x \in [0,1], \quad \text{(b) } f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0.25, 1], \quad \text{(c) } f(x) = \text{Schwarz}(x),\ x \in [1, 17].$$

Wählen Sie die Knoten nach allen angegebenen Regeln, (ggf. auch noch nach eigenen Regeln) und geben Sie Ihre Ergebnisse in Tabellenform ab, so daß man daraus die Ergebnisse reproduzieren könnte. Zeichnen Sie für jedes f (mindestens) eine Fehlerfunktion. Kommentieren Sie die Ergebnisse (was ist gut, was ist schlecht, etc.). Hinweis: Benutzen Sie zum Experimentieren ein vorgefertigtes Interpolationsprogramm `l06_callinterpol.m`. Die Funktion Schwarz finden Sie inkl. Interpolationsknoten in `l06_Schwarz.m`. Sie benötigen dazu alle Programme `l06_*.m` (s. u.). Lesen Sie die Kommentare in diesen Programmen.

Frohe Pfingsttage!

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`