Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 4: Ausgabetermin am 27. April 1999

Abgabetermin: am 4. Mai 1999, vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P10. Berechnen Sie - durch Wahl von Funktionalen mit gleichabständigen Knoten - untere Schranken für den Minimalabstand $\rho_V(f)$ für die folgenden Approximationsprobleme: $f = \tan(\frac{\pi}{4}x)$, $x \in [0,1]$: (a) $V_1 := \langle \frac{1}{x-2} \rangle$, (b) $V_2 := \langle \frac{1}{x-2}, \frac{1}{x+2} \rangle$, (c) $V_3 := \langle \frac{1}{x-2}, \frac{1}{x+2}, \frac{1}{x-6} \rangle$.

Aufgabe P11. Was ist eine Halb(Semi)norm? Nennen Sie ein Beispiel? Zeigen Sie, daß die Summe einer Halbnorm und einer Norm eine Norm ist.

Aufgabe P12. Verbinden Sie die drei Punkte $a_0 := (-1,0)$, $a_1 := (0,1)$, $a_2 := (1,0)$ durch eine Bézier-Kurve. Was ist das? Liegt die Kurve auf dem oberen Einheits-Halbkreis?

Hausaufgaben:

Aufgabe 7. Sei $V \subset \mathrm{C}[a,b]$ ein Haarscher Raum der Dimension n und $t_j \in [a,b]$, $j = 1,2,\ldots,n$ seien vorgegebene, paarweise verschiedene Punkte. Die Norm in $\mathrm{C}[a,b]$ sei immer die Maximumsnorm. Sei I_n der entsprechende Interpolationsoperator, und seien $\ell_k \in V$ die entsprechenden Lagrange-Koeffizienten, die durch $\ell_k(t_j) = \delta_{kj}$ definiert sind. (a) Zeigen Sie:

$$||I_n f|| \le \lambda_n ||f|| \text{ mit } \lambda_n := ||\sum_{k=1}^{n} |\ell_k|\,||. \tag{4.1}$$

Die Funktion $\lambda := \sum_{k=1}^{n} |\ell_k|$ heißt auch *Lebesgue-Funktion*, und λ_n heißt *Lebesgue-Konstante*. (b) Berechnen Sie λ_n für $[a,b] = [-6,6]$ für $2 \le n \le 11$ für (b1) den Polynomfall, und (b2) den Fall, der in (3.3) Aufgabe 6 beschrieben wird, mit $\{\tau_1, \tau_2, \ldots\} := \{b+1, a-1, b+2, a-2, \ldots\}$. Die entsprechenden Lagrangekoeffizienten sind unter (L3.6) auf dem Lösungsblatt 3 angegeben. (c) Zeichnen Sie die entsprechenden Lagrange-Koffizienten für (c1) äquidistante und für (c2) Tschebyscheff-Knoten für den Fall $n = 4$. Insgesamt sind also 16 Figuren zu zeichnen. (d) Zeichnen Sie auch die vier Lebesgue-Funktionen λ für $n = 4$. Falls Sie `matlab` benutzen (das macht die wenigste Arbeit), können Sie alle Lagrange-Koeffizienten mittels

```
figure(1), subplot(4,n,k+2*n*(Fall-1)); % Fall 1:  äquidistante Knoten
figure(1), subplot(4,n,k+n+2*n*(Fall-1)); % Fall 2:  Tschebyscheff-Knoten
```

in eine Zeichnung zeichnen. Verfahren Sie auch so bei den vier Lebesgue-Funktionen.

Aufgabe 8. (a) Berechnen Sie die besten Approximationen von x^4 auf $[0,1]$ durch eine gerade Linie $l(x) = ax + b$ unter Minimierung der folgenden Funktionale:

$$\ell(\varphi) := \quad (a) \quad \int_0^1 |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x, \quad (b) \quad \int_0^1 |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 |\varphi'(x)|^2 \,\mathrm{d}x, \quad (c) \quad \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|. \tag{4.2}$$

(d) Berechnen Sie mit dem Funktional (c) $\ell(f - l)$ für alle drei Fälle. (e) Zeichnen Sie die drei Geraden l zusammen mit $f(x) = x^4$ in eine einzige Figur.

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`