Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 3: Ausgabetermin am 20. April 1999

Abgabetermin: am 27. April 1999, vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P7. Was sind *Operatoren*? Wann sind sie
(a) linear,
(b) stetig,
(c) monoton,
(d) positiv?
Geben Sie für jeden Typ ein Beispiel an.

Aufgabe P8. Was sind
(a) Interpolationsoperatoren,
(b) Projektionsoperatoren,
(c) Bernsteinpolynome,
(d) Bernsteinoperatoren?

Aufgabe P9. Bestehe eine Menge B aus endlich vielen Elementen, also $\#B = k \in \mathbb{N}$.
(a) Wie groß ist $\mathrm{C}(B)$, die Menge aller auf B definierten, und stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}$?
(b) Gibt es auf B definierte Funktionen, die nicht in $\mathrm{C}(B)$ liegen? Wenn ja, welche.

Hausaufgaben: Definition 3.1. Sei $B \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge, und seien $v_j \in \mathrm{C}(B)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ gegebene Funktionen, die den n-dimensionalen Raum $V \subset \mathrm{C}(B)$ aufspannen. Man sagt, daß die Funktionen v_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ ein *Haarsches System* bilden und der Raum V ein *Haarscher Raum* ist, wenn das Interpolationsproblem

$$v(t_j) = y_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

bei beliebigen, paarweise verschiedenen Punkten $t_j \in B$ und bei beliebigen y_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ eine eindeutig bestimmte Lösung in V hat.

Aufgabe 5. Mit den Bezeichnungen aus der Definition 3.1 sei $V \subset \mathrm{C}(B)$ ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: V ist genau dann ein Haarscher Raum, wenn jedes Element $v \in V$, das vom Nullelement aus V verschieden ist, höchstens $n-1$ Nullstellen in B hat.

Aufgabe 6. Sei $[a, b]$ mit $a < b$ gegeben, und seien $\tau_j \notin [a, b]$, $j = 1, 2, \ldots, n$ paarweise verschiedene Punkte.
(a) Zeigen Sie: die Funktionen

$$v_j(t) := \frac{1}{t - \tau_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [a, b] \tag{3.3}$$

bilden ein Haarsches System. (b) Lösen Sie das entsprechende Interpolationsproblem (3.2), (3.3) explizit, indem Sie die zum Lagrange-Problem analogen Probleme $\ell_j(t_k) = \delta_{jk}$ lösen. (c) Setzt man $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$, so ist (3.2) ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_j. Wie sieht die Matrix des entsprechenden Gleichungssystems aus, und wie heißt sie?

Die Aufgaben und mit einiger Verzögerung auch die Lösungen können von den web-Seiten kopiert werden:

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgaben99A.html`