Übungen Approximation

Gerhard Opfer SS 1999

Bogen 2: Ausgabetermin am 13. April 1999

Abgabetermin: am 20. April 1999, vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P4. Wie unterscheiden sich Metriken $\rho(x,y)$ von durch Normen definierte Abstände $||x-y||$.

Aufgabe P5. Berechnen Sie die beste Tschebyscheff-Approximation von $f_0(x) := \sin(\frac{\pi}{2}x)$, $x \in [0,1]$ durch Polynome bis zum Grad Eins.

Aufgabe P6. (a) Seien $(X, ||\quad||_X)$, $(Y, ||\quad||_Y)$ normierte Vektorräume. Wie ist die Norm einer linearen Abbildung $f : X \to Y$ definiert? (b) Wie lautet der Satz von Hahn-Banach?

Definition 2.1. Sei $(X, ||\quad||)$ ein normierter Raum und $K := \{x : ||x|| \le 1\}$ die entsprechende Normkugel.

(a) Der Raum X und die Normkugel heißen *gleichmäßig konvex*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$||x|| = ||y|| = 1, \quad ||\frac{1}{2}(x+y)|| > 1-\delta \quad \Rightarrow \quad ||x-y|| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

(b) Der Raum X und die Normkugel heißen *strikt konvex*, wenn

$$||x|| = ||y|| = ||\frac{1}{2}(x+y)|| = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y. \tag{2.2}$$

Hinweise: Ein gleichmäßig konvexer Banachraum ist reflexiv. Alle L_p, ℓ_p-Räume sind für $p > 1$ gleichmäßig konvex, (nicht jedoch für $p = 1, p = \infty$). Der Vektorraum c_0 aller Nullfolgen mit Norm $\max |x_j|$ für $\{x_j\} \in c_0$ ist kein strikt normierter Banachraum. Der Raum $(\mathrm{C}[a,b], ||\quad||_\infty)$ der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen mit Tschebyscheff-Norm ebenso.

Hausaufgaben: (Π_n ist immer die Menge aller Polynome bis zum Grad n)

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(i) gleichmäßig konvex $\Rightarrow$ strikt konvex.

(ii) Sei X endlich-dimensional: strikt konvex $\Rightarrow$ gleichmäßig konvex.

(iii) Es gibt einen strikt konvexen, nicht gleichmäßig konvexen Raum.

Hinweis: Die Aufgaben sind mit wachsendem Schwierigkeitsgrad angeordnet. Für (iii) genügt ein Literaturhinweis.

Aufgabe 4. (a) Finden Sie für das in Aufgabe P5 angegebene Approximationsproblem eine (nicht triviale) untere Schranke für die Minimalabweichung. (b) Dieselbe Aufgabe mit $p \in \Pi_2$. Benutzen Sie in beiden Fällen zur Definition des entsprechenden Funktionals gleichabständige Knoten.