Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

Bogen 2: Übungen am 5. November 1998

Lösungshinweise

Aufgaben und Lösungen auch in `http://www.math.uni-hamburg.de/home/opfer/aufgabenB.html`

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P4. Die Tests führt man aus mit
(a) `tic,prod(x)/prod(y),toc`
(b) `tic,prod(x./y),toc`
Das zweite Produkt beansprucht (bei tausend Multiplikationen zufälliger Zahlen) mehr Rechenzeit (etwa Faktor 3). Bei bis zu hundert Multiplikationen ist der Unterschied kaum auffällig. Bei Multiplikation von 100 000 Einsen kein Unterschied. Bei $x = y$ liefert (b) ein richtiges, (a) i.a. ein falsches Ergebnis.

Aufgabe P5. Sei $\mathbf{A}$ die inverse Hilbertmatrix der Ordnung vier. Dann ist (nacheinander Cholesky-, LR-, QR-Zerlegung)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 17.3205 & 0 & 0 \\ 60 & -51.9615 & 13.4164 & 0 \\ -35 & 36.3731 & -15.6525 & 2.6458 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -30 & 60 & -35 \\ 0 & 17.3205 & -51.9615 & 36.3731 \\ 0 & 0 & 13.4164 & -15.6525 \\ 0 & 0 & 0 & 2.6458 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -7/12 & -7/10 & 1 & 0 \\ 1/15 & -2/5 & -4/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ 0 & -150 & 540 & -420 \\ 0 & 0 & -42 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.0528 & 0.3084 & 0.6981 & 0.6440 \\ 0.3959 & -0.7516 & -0.1134 & 0.5152 \\ -0.7919 & -0.0579 & -0.4304 & 0.4294 \\ 0.4619 & 0.5802 & -0.5609 & 0.3680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.0308e+02 & 3.3956e+03 & -8.1532e+03 & 5.2918e+03 \\ 0 & 1.9217e+02 & -7.0876e+02 & 5.6192e+02 \\ 0 & 0 & 4.0311e+01 & -5.0955e+01 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5761e+00 \end{pmatrix}$$

Nicht alle angegebenen Matrizen haben alle angegebenen Zerlegungen. Die mit `magic` erzeugten Matrizen sind weder symmetrisch noch haben sie den vollen Rang. Die mit `rand` erzeugten Matrizen sind i. a. nicht symmetrisch.

Aufgabe P6. $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = 2$, $\mathrm{Rang}(\mathbf{B}) = 2$. Die Operationen $\mathbf{A}^{-1}$ und `inv(A)` lassen sich ausführen, ergeben aber eine Warnung. In dem angegebenen Bereich von a lassen sich alle Gleichungssysteme problemlos lösen. Ist aber $10 - a = 9 + \varepsilon$ und $\varepsilon = 10^{-k}$, so verliert man k Stellen. Zum Lösen des Gleichungssystems wähle man $\mathbf{b} = (6, 15, 25 - a)^{\mathrm{T}}$, so daß $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ immer die Lösung $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ hat.
Das Schreiben in Dateien wird in der nächsten Stunde geübt.

Hausaufgaben:

Aufgabe 3. Ist $\mathbf{A}$ nicht singulär, so haben beide Zerlegungen (Crout, Doolittle) die Form $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ mit linker bzw. rechter Matrix $\mathbf{L}, \mathbf{R}$. Diese Zerlegungen kann man nach geeigneter Permutation von $\mathbf{A}$ immer erreichen. Bei Crout werden die Diagonalelemente von $\mathbf{R}$, bei Doolittle die Diagonalelemente von $\mathbf{L}$ vorgeschrieben (G. Opfer, Numerische Mathematik für Anfänger, 2. Aufl., Vieweg, 1994, S. 133). Sei $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$ die mit der Gaußschen Eliminationsmethode erzeugte LR-Zerlegung und $\mathbf{D}$ eine vorgegebene, nicht singuäre Diagonalmatrix und $\mathbf{S} = \operatorname{diag}\mathbf{R}$. Dann ist $\mathbf{PA} = (\mathbf{LSD}^{-1})(\mathbf{DS}^{-1}\mathbf{R})$ eine neue LR-Zerlegung mit vorgegebenen Diagonalelementen in $\mathbf{R}$. Damit haben wir die Zerlegung von Crout gefunden. Die Zerlegung von Doolittle ist dann $\mathbf{PA} = (\mathbf{LD})(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R})$, da $\mathbf{L}$ bereits Einsen in der Diagonalen besitzt. Ob es ökonomisch ist, so zu verfahren, ist dabei noch eine andere Frage.

Aufgabe 4. Die Koeffizienten von $(x-3)^9$ sind $p = (1, -27, 324, -2268, 10206, -30618, 61236, -78732, 59049, -19683)^{\mathrm{T}}$. Die Graphen von $(x-3)^9$ und von $x^9 - 27x^8 + \cdots + 59049x - 19693$ sind unten in Figur L2.1 zu sehen. Derselbe Effekt passiert bei $(x+3)^9$ in der Nähe von $x = -3$. Der Effekt ist i. w. auf die wechselnden Vorzeichen der Koeffizienten zurückzuführen. Die Kondition eines Polynoms $p(x) := \sum_{j=0}^{d} a_j x^j$ an der Stelle x durch Auswertung mit Horner ist (s. Vorlesung)

$$\text{(L2.1)} \qquad \operatorname{Kond}(p)(x) := \frac{\sum_{j=0}^{d} |a_j x^j|}{|\sum_{j=0}^{d} a_j x^j|}.$$

Wechselt $a_j x^j$ das Vorzeichen nicht, so ist $\operatorname{Kond}(p)(x) = 1$, und Fehlerverstärkung tritt nicht auf.

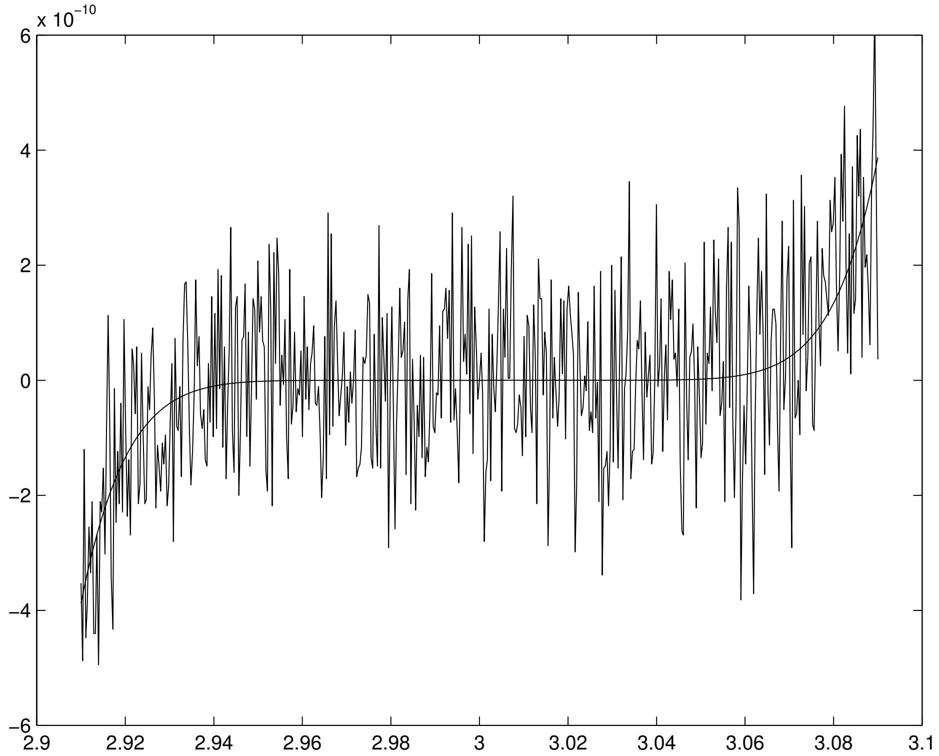

Abbildung L2.1 Graph von $p(x) := (x-3)^9$ und demselben p aber ausmultipliziert und mit Hoerner-Schema

Hinweis: In der auch in diesem Semester stattfindenden Vorlesung *Weiterbildendes Studium Ingenieurmathematik* mit dem Untertitel *Optimierung mit MATLAB* gibt es viele weitere Hinweise und Beispielprogramme, zu finden unter `http://www.math.uni-hamburg.de/cm/wbing/aufgaben.html`