Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

Bogen 14: Ausgabetermin am 4. Februar 1999

Abgabetermin: entfällt

Inhalt von Woche 14: Herstellung einer Bidiagonalform, Algorithmen zur Herstellung der Singulärwertzerlegung, Zwischenformen: tridiagonal bei symmetrischen Matrizen, bidiagonal bei allgemeinen Matrizen, $\mathbf{B}$ bidiagonal $\Rightarrow \mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ist nach Permutation symmetrisch, tridiagonal, weitere Eigenschaften von $\mathbf{A}$, Modifizierungen von **QR**-Iterationen, Zwischenschritt sog. **LR**-Zerlegung (s. (14.3)) mittels Cholesky-Faktorisierung bei allgemeinen SPD-Matrizen, Anwendung auf Bidiagonalformen, direkte effektive Formeln, i. w. nach Demmel, S. 237–245.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P40. Probieren Sie die Herstellung einer Bidiagonalform einer gegebenen (quadratischen) Matrix $\mathbf{A}$ durch sukzesive Anwendung von Householder-Matrizen $\mathbf{Q}_j, \mathbf{V}_j$ in der Form $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1 := \mathbf{Q}_1\mathbf{A}\mathbf{V}_1$, dann Wiederholung mit $\mathbf{A}_1$, insgesamt ist dann

$$\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{Q}_{n-1}\mathbf{Q}_{n-2}\cdots\mathbf{Q}_1\mathbf{A}\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\cdots\mathbf{V}_{n-2} =: \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{V} \tag{14.1}$$

(oberhalb) bidiagonal und

$$\tilde{\mathbf{A}}^*\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^*\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{V} \tag{14.2}$$

d. h. $\tilde{\mathbf{A}}^*\tilde{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ haben dieselben Eigenwerte und damit auch $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{A}$. Im ersten Schritt läßt $\mathbf{V}_1$ die erste Spalte von $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ intakt. Im zweiten Schritt läßt $\mathbf{Q}_2$ die erste Zeile von $\mathbf{A}_1$ mit $\mathbf{A}_1 := \mathbf{Q}_1\mathbf{A}\mathbf{V}_1$, und $\mathbf{V}_2$ die ersten zwei Spalten von $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}_1$ intakt, usw.

Aufgabe P41. Wählen Sie eine SPD-Matrix $\mathbf{A}$ und führen Sie die sogenannte **LR**-Iteration durch:

$$\mathbf{A}_0 := \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}_j - \tau_j^2\mathbf{I} = \mathbf{C}_j^*\mathbf{C}_j = \text{ Cholesky-Zerlegung der linken Seite, } \tau_j^2 \in [0, \min\sigma(\mathbf{A}_j)[, \tag{14.3a}$$

$$\mathbf{A}_{j+1} := \mathbf{C}_j\mathbf{C}_j^* + \tau_j^2\mathbf{I},\ j = 0, 1, \ldots \quad \text{(Cholesky wird durch } \texttt{chol} \text{ realisiert)}. \tag{14.3b}$$

Aufgabe P42. Wir setzen voraus, daß im vorigen Algorithmus die Matrizen $\mathbf{C}_j$ bidiagonal sind und setzen $\mathbf{C} := \mathbf{C}_j, \tilde{\mathbf{C}} := \mathbf{C}_{j+1}$ und beschreiben den Übergang von $\mathbf{C}$ zu $\tilde{\mathbf{C}}$. Die Diagonalelemente von $\mathbf{C}$ seien a_j die Superdiagonalelemente b_j, entsprechend $\tilde{a}_j, \tilde{b}_j$ von $\tilde{\mathbf{C}}$. Setzt man $q_j := a_j^2, e_j := b_j^2$, dasselbe mit Tilden, so wird der Übergang beschrieben durch: ($\delta \geq 0, \tilde{e}_0 = 0$)

$$\tilde{q}_j := q_j + e_j - \tilde{e}_{j-1} - \delta, \tag{14.4a}$$

$$\tilde{e}_j := e_j(q_{j+1}/\tilde{q}_j),\ j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{14.4b}$$

$$\tilde{q}_n := q_n - \tilde{e}_{n-1} - \delta. \tag{14.4c}$$

Diese Form kann noch durch Einführung von

$$d_j := q_j - \tilde{e}_{j-1} - \delta = \frac{q_j}{\tilde{q}_{j-1}}d_{j-1} - \delta \tag{14.5}$$

numerisch stabiler gestaltet werden, das ergibt Algorithmus 5.11 in Demmel, S. 245. Für die Bestimmung von $\delta := \tau_{j+1}^2 - \tau_j^2 \geq 0$ und die Wahl eines Abbrechkriteriums wird auf einen Artikel von Fernando & Parlett, *Accurate singular values and differential qd algorithms*, Numer. Math. **67** (1994), S. 191–229 hingewiesen.

Hausaufgaben: keine mehr

(Version of 3. 2. 1999 at 1345 minutes since midnight, machine used: ultra)