Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

Bogen 13: Ausgabetermin am 28. Januar 1999

Abgabetermin: am 4. Februar 1999

Inhalt von Woche 13: Neun Eigenschaften der Singulärwertzerlegung, Stabilität der **QR**-Zerlegung, Konditionszahl für least squares-Probleme (s. (13.5)), Hessenberg-Form, Tridiagonal- und Bidiagonalformen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P37. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ der j-te Einheitsvektor. Konstruieren Sie (soll heißen mit matlab probieren) Householdermatrizen (s. (13.1)) $\mathbf{H}$ mit $\mathbf{Hx} = c\mathbf{e}_1$ und $c \neq 0$. Können Sie auch $\mathbf{Hx} = c\mathbf{e}_j$ konstruieren und $\mathbf{Hx} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$? Stellen Sie dazu eine Prozedur in der Form `[`ω`]=House(x)` her.

Aufgabe P38. Stellen Sie eine Hessenberg Form $\mathbf{E}^{*)}$ einer beliebigen, quadratischen (auch komplexen) Matrix $\mathbf{A}$ her durch Anwendung von Householdermatrizen $\mathbf{H}_j$ in der Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}_{n-2}\mathbf{H}_{n-3}\cdots\mathbf{H}_1\mathbf{A}(\mathbf{H}_{n-2}\mathbf{H}_{n-3}\cdots\mathbf{H}_1)^*.$$

Aufgabe P39. Versuchen Sie einen Film mit `movie` zu machen. Erzeugen Sie z. B. zwei Farbmatrizen (gleicher Größe) und bilden Sie die konvexe Hülle $\mathbf{H}(\lambda)$. Die Einzelbilder des Films bestehen dann aus $\mathbf{H}(\lambda)$ mit λ =`linspace(0,1,anzahl)`. Sie können z. B. `clown.mat` nehmen als eine Matrix und als zweite Matrix dieselbe Matrix mit von links nach rechts vertauschten Zeilen (`fliplr, flipud`).

Hausaufgaben:

Aufgabe 25. Die Householder-Transformation ist definiert durch

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\omega\omega^*, \quad ||\omega||_2 = 1. \tag{13.1}$$

Zeigen Sie, daß $\mathbf{H}$ eine *Reflektion* ist. Beweisen Sie dazu

$$\omega^*(\mathbf{Hx} + \mathbf{x}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{x}, \tag{13.2}$$

und finden Sie eine geeignete Interpretation (Zeichnung).

Aufgabe 26. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine Matrix mit $m \geq n$ und vollem Rang. Die Singulärwerte von $\mathbf{A}$ seien $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$. Sei

$$\mathbf{x} := \arg\min ||\mathbf{Au} - \mathbf{b}||_2 \text{ und } \tilde{\mathbf{x}} := \arg\min ||(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})\mathbf{u} - (\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})||_2 \tag{13.3}$$

die Lösung des durch Rundung gestörten Problems. Seien die Störungen so klein, daß $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ auch noch vollen Rang hat. Nach einem früheren Satz ist das gewährleistet, wenn

$$\varepsilon := \max\Big(\frac{||\delta\mathbf{A}||_2}{||\mathbf{A}||_2}, \frac{||\delta\mathbf{b}||_2}{||\mathbf{b}||_2}\Big) < \frac{1}{\mathrm{cond}_2(\mathbf{A})} := \frac{\sigma_n}{\sigma_1}. \tag{13.4}$$

Zeigen Sie mit $\sin\theta := \frac{||\mathbf{Ax}-\mathbf{b}||_2}{||\mathbf{b}||_2}$, daß

$$\frac{||\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}||_2}{||\mathbf{x}||_2} \leq \varepsilon\Big\{\frac{2\,\mathrm{cond}_2(\mathbf{A})}{\cos\theta} + \tan\theta\,(\mathrm{cond}_2(\mathbf{A}))^2\Big\} \tag{13.5}$$

gilt. Zum Beweis schreiben Sie formal $\tilde{\mathbf{x}} = ((\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})^*(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})^*(\mathbf{b}+\delta\mathbf{b})$ und entwickeln diesen Ausdruck nach Potenzen von $\delta\mathbf{A}$ und $\delta\mathbf{b}$. Erinnern Sie sich: Für kleine Matrizen $\mathbf{X}$ (in einer Matrixnorm $||\ \ ||$) ist $(\mathbf{I} - \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 + \cdots$ und $||(\mathbf{I} - \mathbf{X})^{-1}|| \leq 1/(1 - ||\mathbf{X}||)$.

(Version of 29. 1. 1999 at 830 minutes since midnight, machine used: sparc4)

---

*) Wie spricht ein Franzose *Hessenberg* aus?