Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

Bogen 12: Ausgabetermin am 21. Januar 1999

Abgabetermin: am 28. Januar 1999

Inhalt von Woche 12: Die Bedeutung der **QR**-Zerlegung für die Lösung von $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2 = \min$ bei überbestimmten Gleichungssystemen, die Singulärwertzerlegung (SVD-Zerlegung, *singular value decomposition*)

$$(12.1) \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*, \\ \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times n},\ \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I},\ \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n),\ \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \dots \ge \sigma_n \ge 0,\ \mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{I} \end{array}$$

bei beliebigen Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $m \ge n$ (bei $m < n$ gehe man zu $\mathbf{A}^*$ über), inkl. Beweis, beste k-Rang-Approximation durch Partialsummen $\mathbf{A}_k$ der Länge k, s. (12.2).

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P34. Die Aufgabe P33 ist immer noch aktuell, die Algorithmen stehen in Aufgabe 23.

Aufgabe P35. Um die Farben in `image` kennen zu lernen, gucken Sie sich `image(j)` für diverse gannzahlige j an. Für welchen Bereich J, $j \in J$ gibt es unterschiedliche Farben? Studieren Sie den Aufruf `image(A)` bei beliebiger Besetzung von $A(1,1,j)$, $j = 1,2,3$. Benutzen Sie auch `help image`.

Aufgabe P36. Erzeugen Sie eine Matrix $\mathbf{A}$ mit ganzzahligen, nichtnegativen Einträgen, z. B. `A=fix(80*rand(m,n));` und betrachten Sie sie z. B. mit `image(A);` Dann erzeugen Sie eine SVD-Zerlegung von $\mathbf{A}$ und betrachten

$$(12.2) \qquad \mathbf{A}_k := \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^*$$

für kleine k. Dabei sind die $\mathbf{u}_j$, $\mathbf{v}_j$ die Spalten von $\mathbf{U}$ bzw. von $\mathbf{V}$. Gucken Sie auch $|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k|$ an. Die Nullmatrix ist dunkelblau, große Einträge erzeugen eine dunkelrote Farbe. Laden Sie eine 200×320-Matrix $\mathbf{X}$ mit dem Befehl `load clown.mat` und machen Sie dasselbe. Wie sieht `image(X');` aus? Gucken Sie sich die SVD-Zerlegung von $\mathbf{X}$ hinsichtlich der Dimensionierung der beteiligten Faktoren an, und beachten Sie, daß $m := 200 < n := 320$ ist.

Hausaufgaben:

Aufgabe 23. Beweisen Sie, daß der gewöhnliche und modifizierte Gram-Schmidt-Prozeß zur Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ mathematisch dasselbe leisten. Die beiden Gram-Schmidt-Prozesse unterscheiden sich nur in den beiden Formeln GSP und MGSP:

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{q}_k := \mathbf{a}_k, \\ \text{GSP} & r_{jk} := \mathbf{q}_j^*\mathbf{a}_k,\ \text{gewöhnlich}, \\ \text{MGSP} & r_{jk} := \mathbf{q}_j^*\mathbf{q}_k,\ \text{modifiziert}, \\ & \mathbf{q}_k := \mathbf{q}_k - r_{jk}\mathbf{q}_j,\ j := 1,2,\dots,k-1, \\ & r_{kk} := ||\mathbf{q}_k||_2,\ \mathbf{q}_k := \mathbf{q}_k/r_{kk},\ k := 1,2,\dots,n. \end{array}$$

Dabei bedeuten $\mathbf{a}_k, \mathbf{q}_k$ die Spalten von $\mathbf{A}, \mathbf{Q}$ und r_{jk} die Elemente von $\mathbf{R}$ mit $r_{jk} := 0$ für $j > k$.

Aufgabe 24. Zeigen Sie, daß die in Aufgabe P36 in (12.2) definierte Matrix $\mathbf{A}_k \in \mathbb{K}^{m\times n}$ die beste Approximation von $\mathbf{A}$ ist im Raum der Matrizen, die höchstens den Rang k haben. Ist $\mathbf{A}_k$ eindeutig bestimmt?

(Version of 21. 1. 1999 at 723 minutes since midnight, machine used: sparc4)