Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer — WS 1998/1999

Bogen 11: Ausgabetermin am 14. Januar 1999

Abgabetermin: am 21. Januar 1999

Inhalt von Woche 11: Lösung von CV-Systemen mit $O(n^2)$ Operationen, i. w. nach der unten angegebenen Arbeit von Reichel & Opfer. Wesentliche Aspekte: (a) Algorithmus ist *progressiv*, d. h. es wird immer ein neuer Interpolationspunkt hinzugefügt, und (b) die *Reihenfolge* der Knoten, sog. van-der-Corput-Sequenz; least-square-Algorithmen, Lösung von $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2 = \min$ bei überbestimmten Systemen, Gram-Schmidt-Prozeß, zwei Varianten, gewöhnlich und modifiziert.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P31. Berechnen Sie T-Polynome $p_j,\ j \geq 0$, definiert durch

(11.1) $$p_0 = 1,\ p_j(z) = w^j + (\rho/w)^j,\ j \geq 1,\ z = w + \rho/w$$

auf Ellipsen E_ρ und skizzieren Sie den Betrag, den Real-, den Imaginärteil auf dem Ellipsenrand

(11.2) $$\partial E_\rho = \{\exp(\mathrm{i}t) + \rho \exp(-\mathrm{i}t),\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad \rho \in [0, 1].$$

Wählen Sie $\rho = 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1$, und zeichnen Sie auch die Ellipsen (`axis 'equal'`).

Aufgabe P32. Berechnen Sie Konditionszahlen von $\mathbf{V}_\rho$ für obige Fälle, verwenden Sie `cond, condest`, vergleichen Sie diese Zahlen auch mit den Konditionszahlen für die gewöhnlichen Vandermonde-Matrizen $\mathbf{V}$ bei denselben Knoten, vgl. Sie dazu (11.4).

Aufgabe P33. Vergleichen Sie den gewöhnlichen Gram-Schmidt-Prozeß (GSP) mit dem modifizierten GSP (MGSP). Orthogonalisieren Sie damit zufällige Matrizen, inverse Hilbert-Matrizen (Ordnung ≤ 10) und modifizierte inverse Hilbertmatrizen, die aus inversen Hilbert-Matrizen (h_{jk}) durch $h_{12} := -h_{12}$ hervorgehen (Zerstörung der Symmetrie), GSP und MGSP in einer Anlage.

Hausaufgaben:

Aufgabe 21. Sei $\mathbf{C} := (c_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Cauchy-Matrix, d. h.

(11.3) $$c_{jk} := \frac{1}{x_j - y_k} \text{ mit } x_j \neq y_k \text{ für alle } j, k = 1, 2, \ldots, n$$

mit paarweise verschiedenen Zahlen x_j und mit paarweise verschiedenen Zahlen y_k. Finden Sie eine explizite Inversionsformel für $\mathbf{C}$ und wenden Sie diese auf den Spezialfall $x_j = j - 1,\ y_k = -k$ (Hilbertmatrix) an. Hinweis: Man betrachte das Interpolationsproblem im Haarschen Raum V, der durch $v_j(x) = \frac{1}{x - y_j}, j = 1, 2, \ldots, n$ aufgespannt wird. In diesem Raum suchen Sie ein Analogon zu den Lagrangeschen Koeffizienten, d. h. suchen Sie nach Funktionen $l_j \in V$ mit $l_j(x_k) = \delta_{jk}$.

Aufgabe 22. Stellen Sie ein matlab-Programm zur Lösung des (dualen) CV-Problems (CV=Chebyshev-Vandermonde)

(11.4) $$\mathbf{V}_\rho^{\mathrm{T}} \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{V}_\rho = (p_j(z_k)), \quad z_k = w_k + \rho/w_k, \quad w_k = \exp(2\pi \mathrm{i} c_k), \quad c_k = k/n,^{*)}\ j, k = 0, 1, \ldots, n$$

her, das nur $O(n^2)$ Operationen bentigt. Dabei liegen die Knoten z_k auf dem Rand einer Ellipse ∂E_ρ, und der zugrunde liegende Raum wird aufgespannt von Tschebyscheff-Polynomen auf den Ellipsen E_ρ. Man vgl. die Formeln (11.1) und (11.2). Bestimmen Sie nach berechnetem $\mathbf{a}$ das Residuum $\mathbf{r} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - \mathbf{f}$, (in einer Norm) bei gewöhnlicher Knotenreihenfolge $z_0, z_1, \ldots, z_n$ und der entsprechenden Wahl nach van der Corput. Einzelheiten in L. Reichel & G. Opfer: Chebyshev-Vandermonde Systems, Math. Comput, **57**(1991), 703–721.

`(Version of 29. 1. 1999 at 826 minutes since midnight, machine used: sparc4)`

---

*) bis auf die van der Corput-Reihenfolge