Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

Bogen 10: Ausgabetermin am 7. Januar 1999

Abgabetermin: am 14. Januar 1999

Inhalt von Woche 10: Matrizen mit nur $O(n)$ Erzeugern: Vandermonde-, Cauchy- (speziell Hilbert-), Toeplitz-, Hankel-Matrizen, Problem bei symmetrischen Toeplitz-Matrizen: Kann man zu vorgegebenen n reellen Zahlen eine symmetrische Toeplitz-Matrix *konstruieren*, die diese Zahlen als Eigenwerte besitzt. Existenz nach einer Arbeit von Landau (ca.1994) gesichert. Anfang von: Lösung des Vandermonde Gleichungssystems $\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ in $O(n^2)$ Schritten wobei Tschebyscheff-Polynome auf Ellipsen (mit einem Parameter zum Verändern der Form) als Basis verwendet werden. Das erlaubt die Spezielfälle: Monome (Ellipse=Kreis), gew. T-Polynome (Ellipse=Intervall).

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P28. Man berechne Konditionen von speziellen Matrizen vom obigen Typ. Bei Vandermonde-Matrizen experimentiere man mit den Knoten (äquidistant, Tschebyscheff, zufällig mit verschiedenen Verteilungen).

Aufgabe P29. Man approximiere die Daten $(x_j, y_j), j = 1, 2, \ldots, 23$ in $[-10, 10]$ mit $x = -5 : 0.5 : 6$ und $y = \sin(\pi x/5) + x/5$ durch Polynome wachsenden Grades (bis 22) unter Benutzung von `polyfit`. Man berechne die 2-Norm des Fehlers und trage diesen Fehler über dem Polynomgrad auf. Man zeichne neben y auch die resultierenden Polynome für die Grade 1, 3, 6, 20 in ein Bild.

Aufgabe P30. Suchen Sie in http://www.netlib.org nach Eigenwertprogrammen.

Hausaufgaben:

Aufgabe 19. Sei die quadratische Matrix $\mathbf{A}$ strikt spalten-diagonaldominant. (a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{A}$ nicht singulär ist. (b) Finden Sie zusätzliche Bedingungen, so daß $\mathbf{A}$ positiv definit ist im Sinne von

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \text{ für alle reellen } \mathbf{x} \neq 0, \tag{10.1}$$

ggf. aber ohne Symmetrie.

Aufgabe 20. Sei $\mathbf{A}$ eine reelle oder komplexe quadratische Matrix mit

(10.2). $$\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{z} > 0 \text{ für alle komplexen } \mathbf{z} \neq 0.$$

Zeigen Sie, daß $\mathbf{A}$ hermitesch ist (im reellen Fall also symmetrisch). Finden Sie eine im Sinne (10.1) der vorigen Aufgabe reelle, positiv definite 2×2-Matrix, die nicht positiv definit ist im Sinne von (10.2).

(Version of 7. 1. 1999 at 500 minutes since midnight, machine used: sparc4)