Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

Bogen 8: Ausgabetermin am 10. Dezember 1998

Abgabetermin: am 17. Dezember 1998

Inhalt von Woche 8: Hagers (Aufstiegs-)Algorithmus zur Schätzung der Kondition $\kappa_1(\mathbf{A}) := ||\mathbf{A}||_1\, ||\mathbf{A}^{-1}||_1$, Aufstiegsrichtungen über Richtungsableitungen, Übertragung auf $\tilde{\kappa}_\infty(\mathbf{A}) := ||\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}^{-1}|\,||_\infty$, Abschätzung des relativen Fehlers der ausgerechneten Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, Nachiteration mit Newton (ein Schritt), Rückwärtstabilität der Nachiteration.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P22. (Wiederholung von P21) Wandeln Sie ein (einfaches) matlab-Bild, in dem auch `'o'` vorkommt in eine Postscriptdatei um (Bild.ps). Gucken Sie sich die von matlab erzeugte Postscriptdatei mit einem Editor an. Versuchen Sie die Strichdicke zu manipulieren (benutzen Sie dazu eine Kopie von Bild.ps). Suchen Sie nach `6 w` und ersetzen Sie die 6. Ersetzen Sie einige (oder alle) der `'o'` durch $\bullet$. Suchen Sie nach `MakeOval` und ersetzen Sie `FO` durch `PO`. Manipulieren Sie die `BoundingBox`, aber nicht die `PageBoundingBox`. Binden Sie das Bild in TeX ein (`\psfig{file=Bild.ps,width=0.25\hsize,height=3truecm}`). Zentrieren Sie das Bild, setzen Sie es nach links und nach rechts. Manipulieren Sie die Bildgröße mit `width, height, width` und `height` simultan. Studieren Sie Veränderungen der `BoundingBox`. Das geht gut mit `xdvi`. Setzen Sie das Bild in einen Kasten (`\setbox0`), so daß Sie noch etwas daneben schreiben können.

Aufgabe P23. Vergleichen Sie die äquivalenten Gleichungssysteme bezüglich ihrer Kondition.
(a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,
(b) $\mathbf{DAx} = \mathbf{Db}$,
(c) $\mathbf{D}_1\mathbf{A}\mathbf{D}_2\mathbf{z} = \mathbf{D}_1\mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{D}_2\mathbf{z}$
mit Diagonalmatrizen $\mathbf{D}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$. Typische Wahlen für die Diagonalelemente d_i von $\mathbf{D}, \mathbf{D}_1$ sind $d_i = 1/||\mathrm{Zeile}_i(\mathbf{A})||_2$, bei $\mathbf{D}_2$ wählen Sie entsprechend die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$.

Aufgabe P24. Vergleichen Sie drei Varianten der Multiplikation komplexer Zahlen in der Zeit und der Anzahl der `flops`: (a) $w := z_1 * z_2$ (matlab berechnet 6 flops), (b) dasselbe handgestrickt: $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j, j = 1,2 \Rightarrow w = (x1 * x2 - y1 * y2) + \mathrm{i}(x1 * y2 + x2 * y1)$, (4 mult, 3(2) add). (c) Sei $w = u + v\mathrm{i}$. Wir rechnen: $u := (x_1 + y_1) * x_2, v := u - x_1 * (x_2 - y_2), u := u - y_1 * (x_2 + y_2)$. Das sind 3 mult und 5 add. Prüfen Sie (c) nach und gucken Sie, wieviel `flops` von matlab berechnet werden. Hinweis: Schreiben Sie immer `a+bi`, nicht `a+b*i`.

Hausaufgaben:

Aufgabe 15. Schreiben Sie je ein matlab-Programm zur Berechnung von $\kappa_1(\mathbf{A}), \tilde{\kappa}_\infty(\mathbf{A})$ nach Hagers Aufstiegsalgorithmus. Testen Sie die Programme an inversen Hilbert- und Vandermonde-Matrizen geringer Ordnung (≤ 10) und den in der nächsten Aufgabe genannten Matrizen.

Aufgabe 16. Lösen Sie Gleichungssysteme und führen Sie einen Nachiterationsschritt aus. Vergleichen Sie die Genauigkeiten der beiden Lösungen. Wählen Sie die rechten Seiten der Gleichungssysteme so, daß $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ die exakte Lösung ist. Verwenden Sie zum Lösen Gaußelimination. Neben den in der vorigen Aufgabe genannten Matrizen, probieren Sie auch die in Aufgabe P17 angegebene Matrix (strikte untere Hälfte -1, Diagonale 1, rechte Spalte 1, Rest 0) und eine Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{DB}$ folgendermaßen: $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ + zufällige Störungen der Größe 10^{-7} außerhalb der Diagonalen und $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ mit $d_i = a^{i-1}$ eine Diagonalmatrix mit $a > 1$, z. B. $a = 2$ oder $a = 5$. Bei den letzten beiden Matrizen lassen Sie auch größere Ordnungen (bis 100) zu.

(Version of 10. 12. 1998 at 487 minutes since midnight, machine used: sparc4)