Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

Bogen 7: Ausgabetermin am 3. Dezember 1998

Abgabetermin: am 10. Dezember 1998

Inhalt von Woche 7: Gaußsche Dreieckszerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ (Gauß-Elimination), Fehler bei der Gauß-Elimination, Abschätzung des Wachstumsfaktors $||\mathbf{R}||/||\mathbf{A}||$, schlimmster Fall (2^{n-1}), Beispiel dafür auf Blatt 6, Aufgabe P17, näherungsweise Berechnung der Kondition mit einem Aufstiegsalgorithmus, Gradient ist Richtungsableitung der Norm in Richtung der Einheitsvektoren (wird fortgesetzt).

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P19. Berechnen Sie näherungsweise einige Matrixnormen $||\mathbf{A}||_p$ für kleine Matrizen und $p = 1.5, 2, 2.5$ durch Probieren. Nehmen Sie z. B. inverse Hilbertmatrizen bis zur Ordnung vier.

Aufgabe P20. Berechnen Sie die Richtungsableitungen (Formel (7.1)) von $f(x) = ||\mathbf{Ax}||_p$ numerisch. Nehmen sie als Richtungen die Einheistsvektoren und die *inversen* Einheitsvektoren (Nullen und Einsen vertauschen). Nehmen Sie die Beispiele der vorigen Aufgabe.

Aufgabe P21. Wandeln Sie ein (einfaches) matlab-Bild, in dem auch `'o'` vorkommt in eine Postscriptdatei um (Bild.ps). Gucken Sie sich die von matlab erzeugte Postscriptdatei mit einem Editor an. Versuchen Sie die Strichdicke zu manipulieren (benutzen Sie dazu eine Kopie von Bild.ps). Suchen Sie nach `6 w` und ersetzen Sie die 6. Ersetzen Sie einige (oder alle) der `'o'` durch $\bullet$. Suchen Sie nach `MakeOval` und ersetzen Sie `FO` durch `PO`. Manipulieren Sie die `BoundingBox`, aber nicht die `PageBoundingBox`.
Binden Sie das Bild in TEX ein (`\psfig{file=Bild.ps,width=0.25\hsize,height=3truecm}`). Zentrieren Sie das Bild, setzen Sie es nach links und nach rechts. Manipulieren Sie die Bildgröße mit `width, height, width` und `height` simultan. Studieren Sie Veränderungen der `BoundingBox`. Das geht gut mit `xdvi`. Setzen Sie das Bild in einen Kasten (`\setbox0`), so daß Sie noch etwas daneben schreiben können.

Hausaufgaben:

Aufgabe 13. Sei $\mathbf{A}$ eine beliebige Matrix (rechteckig, ggf. auch komplex). Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{Ax}||_1$, also

$$f'(\mathbf{x},\mathbf{h}) := \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \frac{f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\alpha}. \tag{7.1}$$

Diese Ableitung heißt auch *(einseitige) Gâteaux-Ableitung*. Hinweis: (a) Beginnen Sie mit einer quadratischen Matrix mit Ordnung $n = 1$. Machen Sie sich einige Gedanken zur Berechnung von $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{Ax}||_\infty$. Hinweis: (b) Behandeln Sie zuerst die folgende Aufgabe 14 (i). Anwendung: Sei in (7.1) $\mathbf{x}$ eine lokale Maximalstelle von f bezüglich einer Umgebung $U(\mathbf{x})$ und gilt $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{h} \in U(\mathbf{x})$ für alle hinreichend kleinen $\alpha > 0$, so ist $f'(\mathbf{x},\mathbf{h}) \le 0$. Ist darüber hinaus $f'(\mathbf{x},\mathbf{h})$ linear in $\mathbf{h}$, so gilt $f'(\mathbf{x},\mathbf{h}) = 0$.

Aufgabe 14. (i) Sei $(H, <,>)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Berechnen Sie die Richtungsableitungen $f'(x,h)$ von $(a)\, f(x) := <x,x>$, $(b)\, f(x) := ||x||$. (ii) Finden Sie in der Literatur die Richtungsableitung von

$$f(\varphi) := ||\varphi||_\infty, \quad \varphi \in \mathrm{C}[a,b]. \tag{7.2}$$

Gibt es auch Ergebnisse für komplexwertige Funktionen? Wenden Sie die gefundenen Ergebnisse an auf

$$f(\varphi) := ||g-\varphi||_\infty, \quad \varphi \in \Phi \subset \mathrm{C}[a,b], \quad g \in \mathrm{C}[a,b]\backslash\Phi. \tag{7.3}$$

(Version of 2. 12. 1998 at 841 minutes since midnight, machine used: sparc4)