Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

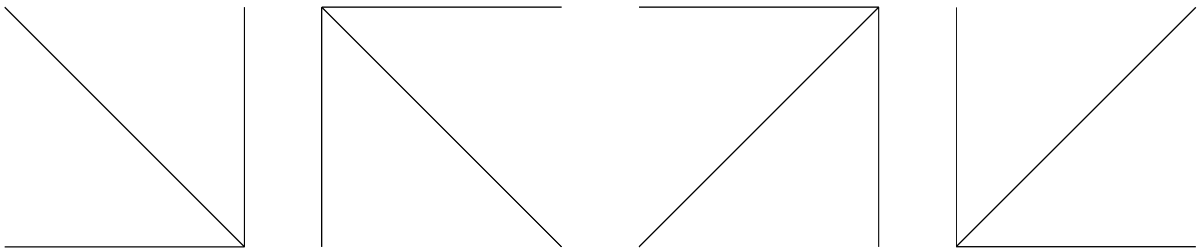
Bogen 6: Ausgabetermin am 26. November 1998

Abgabetermin: am 3. Dezember 1998

Inhalt von Woche 6: Abstand zur nächsten singulären Matrix, Rückwärtsfehler bei linearen Gleichungssystemen, Gauß-Elimination, Notwendigkeit von Pivotstrategien.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P16. Unter einer *Pfeil-Matrix* versteht man eine Matrix, die nicht verschwindende Elemente nur in den Diagonalen und am Rand in Pfeilform hat. Man vgl. dazu die Figur 6.1.



Figur 6.1: Schema von Pfeilmatrizen

Man besetze die Diagonalelemente mit Einsen, die anderen Elemente in den Pfeilen mit 0.1 und mache LR-Zerlegungen. Was ist zu beobachten? Dasselbe mit anderen Zahlen. Ordnung 10 ist genug.

Aufgabe P17. Besetzen Sie $\mathbf{A}$ folgendermaßen: In der strikten, unteren Hälfte: $-$Einsen, in der Diagonalen: Einsen, am rechten Rand: auch Einsen, Rest: Nullen. Man studiere $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ bei verschiedenen Matrixgrößen. Wie ist die Kondition von $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von der Ordnung?

Aufgabe P18. Sei $\mathbf{A}$ nicht singulär. Man suche $\mathbf{B}$, möglichst dicht bei, mit $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ist singulär. Gibt es ein Konstruktionsprinzip?
Diskussion: Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix, aber nicht die Nullmatrix. Kann $||\mathbf{A}||$ jeden Wert annehmen für Matrixnormen $||\quad||$, insbesondere für Operatornormen. Man studiere auch $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 11. Sei $p \in \Pi_n$ mit $n \geq 2$ und mit reellen Koeffizienten, und $d(x) = x^2 - 2ax + b$ mit gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$. (a) Stellen Sie ein Schema zur Berechnung der Koeffizienten von $q \in \Pi_{n-2}$ her mit

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x), \quad r \in \Pi_1. \tag{6.1}$$

Anwendung: Soll p an einer Stelle $c \in \mathbb{C}$ ausgewertet werden, so ist $d(x) := (x-c)(x-\overline{c}) = x^2 - 2\Re cx + |c|^2$ zu bilden, ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Sind q, r bestimmt, so ist

$$p(c) = r(c), \quad p(\bar{c}) = r(\bar{c}) = \overline{r(c)}. \tag{6.2}$$

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Operationen zur Auswertung von $p(c)$ nach diesem Schema. (c) Bestimmen Sie die Kondition dieses Schemas indem Sie in den typisch auftretenden Operationen $q = 2a\bar{q} - b\bar{\bar{q}} + p$ (dabei repräsentieren q die Koeffizienten von q und p die von p) Fehler hinzufügen in der Form $q = ((2a\bar{q}(1+\delta) - b\bar{\bar{q}}(1+\delta))(1+\delta) + p)(1+\delta)$. Vgl. Sie Demmel, S. 15 für das gewöhnliche Horner-Schema.

(d) Berechnen Sie numerisch nach dem ausgerechneten Schema $p(x) = (x^2 + 4)^6 = x^{12} + 24x^{10} + \cdots + 4096$ in einer kleinen Umgebung von $x = 2\mathrm{i}$. Machen Sie eine Zeichnung. Die kleine Umgebung könnte hier aus einer Kreisscheibe bestehen, über dieser Kreisscheibe könnte man den Real-, Imaginärteil und Betrag von p auftragen.
Zusatz (ohne Bewertung) Vergleichen Sie die Auswertung mit dem gewöhnlichen Horner-Schema mit komplexer Rechnung. Wieviele `flops` berechnet matlab für eine komplexe Operation? Machen Sie eine kleine Tabelle für die vier Grundrechenarten.

Aufgabe 12. Man schreibe ein matlab-Programm zur Zerlegung von $\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ mit nur einer Schleife unter Verwendung des Speicherplatzes von $\mathbf{A}$. Man mache dasselbe mit drei geschachtelten Schleifen und vergleiche den Zeitaufwand. Man nehme der Einfachheit an, daß die Matrix $\mathbf{A}$ schon permutiert ist, so daß Vertauschungen nicht erforderlich sind. Zum Testen nehme man daher zweckmäßig SPD-Matrizen.

(Version of 25. 11. 1998 at 600 minutes since midnight, machine used: ultra)