Numerische Lineare Algebra
mit einer Einführung in MATLAB

Gerhard Opfer WS 1998/1999

Bogen 5: Ausgabetermin am 19. November 1998

Abgabetermin: am 26. November 1998

Inhalt von Woche 5: Lineare Gleichungen und Störungsrechnungen, Das Verhalten von $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$ bei kleinen Störungen $\delta\mathbf{A}, \delta\mathbf{b}$, die Berechnung der Kondition, s. Formel (5.1), verschiedene Varianten.

Präsenzaufgaben: (Schreiben Sie alle Texte in Dateien!)

Aufgabe P13. Gucken Sie verschiedene Matrixtypen mit `surf` an. Sie können dann mit `shading` diverse Effekte studieren. Berechnen Sie die Kondition von diversen Matrixtypen. Zeichnen Sie z. B. die Kondition der Hilbertmatrix als Funktion der Ordnung n. Gehen Sie zu einer logarithmischen Skala über. Beziehen Sie auch Vandermonde-Matrizen mit ein (`vander`). Diese müssen mit einem Knotenvektor $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ besetzt werden. Auch `rand` mit verschiedenen Verteilungsfunktionen sollte einbezogen werden. Es ist zweckmäßig, ein Protokoll über die diversen Ergebnisse z. B. in einer TEX-Datei anzulegen, die auch Figuren enthalten könnte. Das gilt generell für alle Aufgaben.

Aufgabe P14. Berechnen Sie Determinanten und Konditionen von Matrizen und zeigen Sie, daß kein Zusammenhang besteht. Experimentieren Sie mit der leicht ausrechenbaren Zeilensummennorm $p = \infty$. Verwenden Sie z. B. eine obere Dreiecksmatrix, die an allen Diagonalstellen 1 und sonst -1 enthält. Wie lautet die Inverse? In einer ruhigen Stunde rechnen Sie das Ergebnis mal nach. Ein anders geartetes Beispiel erhält man für $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(0.1, 0.1, \ldots, 0.1)$.

Aufgabe P15. (a) Konstruieren Sie Begleitmatrizen mit `compan` und machen Sie ähnliche Tests wie oben. (b) Was ist die Kondition von 1×1-Matrizen? Was ist die Kondition von $f(x) = 1/x$ in der Nähe von Null. Vergleichen Sie die Kondition mit der tatsächlichen Auswertung von f.

Hausaufgaben:

Aufgabe 9. Für nicht singuläre Matrizen $\mathbf{A}$ ist bei beliebiger Matrixnorm $|| \quad ||$ die *Kondition* von $\mathbf{A}$ definiert durch

$$\kappa(\mathbf{A}) := ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{A}^{-1}||. \tag{5.1}$$

Sei für eine nicht singuläre Matrix $\mathbf{A}$, eine beliebige Matrix $\mathbf{F}$ gleicher Ordnung n und einen beliebigen n-dimensionalen Vektor $\mathbf{f}$ das mit dem reellen ε parametrisierte Gleichungssystem

$$(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{F})\mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{b}+\varepsilon\mathbf{f}, \quad \mathbf{x} := \mathbf{x}(0) \tag{5.2}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß $\mathbf{x}(\varepsilon)$ in einer Umgebung von Null differenzierbar ist, und beweisen Sie die Formel

$$\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{x}(\varepsilon)||}{||\mathbf{x}||} \le \kappa(\mathbf{A})\Big(|\,\varepsilon\,|\frac{||\mathbf{F}||}{||\mathbf{A}||} + |\,\varepsilon\,|\frac{||\mathbf{f}||}{||\mathbf{b}||}\Big) + o(\varepsilon). \tag{5.3}$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Taylorentwicklung für $\mathbf{x}(\varepsilon)$ und zeigen Sie $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f}-\mathbf{F}\mathbf{x})$.

Aufgabe 10. Für nicht singuläre Matrizen $\mathbf{A}$ definieren wir die Abbildung

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}. \tag{5.4}$$

Zeigen Sie, daß diese Abbildung differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von f und leiten Sie einen Zusammenhang zur Kondition (5.1) $\kappa(\mathbf{A})$ her. Hinweis: Die Ableitung kann über die Richtungsableitung definiert werden.

b.w.

Aufgabe 11. (Für die übernächste Woche) Sei $p \in \Pi_n$ mit $n \geq 2$ und mit reellen Koeffizienten und $d(x) = x^2 - 2ax + b$ mit gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$. (a) Stellen Sie ein Schema zur Berechnung der Koeffizienten von $q \in \Pi_{n-2}$ her mit

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x), \quad r \in \Pi_1. \tag{5.5}$$

Anwendung: Soll p an einer Stelle $c \in \mathbb{C}$ ausgewertet werden, so ist $d(x) := (x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - 2\Re cx + |c|^2$ zu bestimmen, ein Polynom mit reellen Koeffizienten und q, r sind nach dem Schema zu bestimmen. Dann folgt

$$p(c) = r(c), \quad p(\bar{c}) = r(\bar{c}) = \overline{r(c)}. \tag{5.6}$$

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Operationen zur Auswertung von $p(c)$ nach diesem Schema. (c) Bestimmen Sie die Kondition dieses Schemas indem Sie in den typisch auftreteneden Operationen $q = 2a\bar{q} - b\bar{\bar{q}} + p$ (dabei repräsentieren q die Koeffizienten von q und p die von p) $q = ((2a\bar{q}(1+\delta) - b\bar{\bar{q}}(1+\delta))(1+\delta) + p)(1+\delta)$ setzen. Vgl. Sie Demmel, S. 15. (d) Berechnen Sie numerisch nach dem ausgerechneten Schema $p(x) = (x^2 + 4)^6 = x^{12} + 24x^{10} + \cdots + 4096$ in einer kleinen Umgebung von $x = 2\mathrm{i}$. Machen Sie eine Zeichnung. Die kleine Umgebung könnte hier aus einer Kreisscheibe bestehen, über dieser Kreisscheibe könnte man den Real-, Imaginärteil und Betrag von p auftragen.