Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 25: (vorletzter Bogen) Übungen am 14. Juli 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P73. s. Buch, S. 223–226.

Aufgabe P74. (a) s. Buch, 226–230, (b) nein. Die beiden Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben beide das charakteristische Polynom $p(z) = -z(1-z)$, die Eigenwerte und die algebraischen Vielfachheiten stimmen also überein. $\mathbf{A}$ ist nicht normal, $\mathbf{B}$ ist als Diagonalmatrix normal. Zwei ähnliche Matrizen sind aber simultan normal oder simultan nicht normal, das ist einfach nachzurechnen.

Aufgabe P75. (a) Das charakteristische Polynom ist $p(x) = -x(x^2 - 15x - 18)$ mit den Nullstellen $0.5(15 - \sqrt{297}) \approx -1.1168$, 0, $0.5(15 + \sqrt{297}) \approx 16.1168$, (b) nein, denn $(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{11} = 14$, $(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{11} = 66$.

Aufgabe 49.

1. Entwicklung von $\det(\mathbf{A})$ nach der ersten Spalte und von $\det(\mathbf{A}^*)$ nach der ersten Zeile liefert für $\det(\mathbf{A})$ Ausdrücke in a_{jk} und für $\det(\mathbf{A}^*)$ dieselben Ausdrücke in $\overline{a_{jk}}$.
2. Folgt wegen $p_{\mathbf{A}^*}(z) = \det(\mathbf{A}^* - z\mathbf{I})$ aus 1.
3. $p_{\mathbf{A}}(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{p_{\mathbf{A}}(z)} = 0 \Leftrightarrow p_{\mathbf{A}^*}(\overline{z}) = 0$.
4. Wir betrachten den Rayleigh-Quotienten

$$R(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \tag{L25.1}$$

Durchläuft $\mathbf{x}$ alle Eigenvektoren, so durchläuft $R(\mathbf{x})$ alle Eigenwerte. Es ist $\overline{R(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}}$. Ist $\mathbf{A} = c\mathbf{A}^*$ mit $|c| = 1$, so ist $R(\mathbf{x}) = c\overline{R(\mathbf{x})}$. Setzen wir $R(\mathbf{x}) = u + \mathrm{i}\, v$ und $c = d + \mathrm{i}\, e$, so folgt $u + \mathrm{i}\, v = (d + \mathrm{i}\, e)(u - \mathrm{i}\, v) = du + ev + \mathrm{i}\,(eu - dv)$. Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $u = du + ev$; $v = eu - dv$. Wir betrachten 3 Spezialfälle:

(a) $c = 1$, also $d = 1, e = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$,
(b) $c = -1$, also $d = -1, e = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \sigma(\mathbf{A}) \subset \mathrm{i}\,\mathbb{R}$,
(c) $c = \mathrm{i}$, also $d = 0, e = 1 \Rightarrow u = v \Rightarrow \sigma(\mathbf{A}) \subset (1 + \mathrm{i})\,\mathbb{R}$.

Aufgabe 50.

5. (a) Sei $\mathbf{Q}^*\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^* &= \mathbf{Q}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}\,\mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_n})\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\,\mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)\mathbf{Q}^*, \\ \mathbf{A}^*\mathbf{A} &= \mathbf{Q}\,\mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda}_n)\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\,\mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)\mathbf{Q}^*. \end{aligned}$$

(b) Sei $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Nach dem Satz von Schur gibt es eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q}$ mit $\mathbf{Q}^*\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{R}$, wobei $\mathbf{R}$ eine rechte Dreiecksmatrix ist. Äquivalent dazu ist $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^*$. Daraus folgt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}\mathbf{R}^*\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{R}^*\mathbf{Q}^*, \quad \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}^*\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}^*\mathbf{R}\mathbf{Q}^*.$$

Aus $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ folgt daher

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{R}. \tag{L25.2}$$

Das ist nur möglich, wenn die rechte Matrix $\mathbf{R}$ eine Diagonalmatrix ist. Um das einzusehen, sei $\mathbf{R} = (r_{jk})$ mit $r_{jk} = 0$ für $j > k$. Wir vergleichen dazu die entsprechenden Elemente in (L25.2).

$$\sum_{\ell=\max(j,k)}^{n} r_{j\ell}\overline{r_{k\ell}} = \sum_{\ell=1}^{\min(j,k)} \overline{r_{\ell j}} r_{\ell k} \quad \overset{j=k}{\Rightarrow} \quad \sum_{\ell=j}^{n} r_{j\ell}\overline{r_{j\ell}} = \sum_{\ell=j}^{n} |r_{j\ell}|^2 = \sum_{\ell=1}^{j} \overline{r_{\ell j}} r_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{j} |r_{\ell j}|^2.$$

Für $j = 1$ folgt daraus $r_{1\ell} = 0, \ell = 2, 3, \ldots, n$. Wegen $r_{12} = 0$ folgt für $j = 2$ auch $r_{2\ell} = 0, \ell = 3, 4, \ldots, n$, etc. Alle Einträge rechts neben den Diagonalelementen verschwinden, also ist $\mathbf{R}$ eine Diagonalmatrix. Damit liefert die Schursche Zerlegung die gesuchte Ähnlichkeitsabbildung auf eine Diagonalmatrix.

6. $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = c\mathbf{A}^*\mathbf{A}^*, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^* = c\mathbf{A}^*\mathbf{A}^*$. Die Behauptung folgt aus 5.
7. Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$. Aus $\mathbf{A} = \mathrm{i}\,\mathbf{A}^*$ folgt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})\,a & b \\ \mathrm{i}\,\overline{b} & (1+\mathrm{i})\,d \end{pmatrix}, \; b \in \mathbb{C}, \;\; a, d \in \mathbb{R}.$$

Nach 4c. liegen alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ auf der Diagonalen $x = y$. Das wurde hier aber nicht gefragt.