Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

Bogen 23: Übungen am 30. Juni 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P67. (a) Hat $\mathbf{A}$ die Eigenschaft $\mathrm{Rang}(\mathbf{I}-\mathbf{A}) \le 1$, so heißt $\mathbf{A}$ elementar. (b) Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ Spaltenvektoren (nicht notwendig gleich lang), so heißt die Matrix $\mathbf{Z} = \mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$ eine Dyade. Die Matrix $\mathbf{Z}$ besteht aus den Elementen $z_{jk} = x_j y_k$. (c) Eine Matrix $\mathbf{A}$ hat den Rang ≤ 1 genau dann, wenn es Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ gibt mit $\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$. Der Rang ist Eins, genau dann wenn $\mathbf{x} \ne 0, \mathbf{y} \ne 0$.

Aufgabe P68. (a), (b) durch Besichtigung, auch Inspektion genannt, (c) $\mathbf{H} * \mathbf{H} = (\mathbf{I} - 2\omega\omega^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - 2\omega\omega^{\mathrm{T}}) = \mathbf{I} - 4\omega\omega^{\mathrm{T}} + 4\omega(\omega^{\mathrm{T}}\omega)\omega^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$, (d) folgt aus (c), (e) $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\omega(\omega^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, (f) $\mathbf{H}\omega = \omega - 2\omega(\omega^{\mathrm{T}}\omega) = -\omega$.

Aufgabe P69. Wir müssen nur zwei Schritte rechnen. Aber $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ kann groß sein. Im ersten Schritt ist $\mathbf{d} = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $a = -\sqrt{m}$ und $||\mathbf{d}-\mathbf{c}||^2 = 2\sqrt{m}(\sqrt{m}+1)$ und $\mathbf{d}-\mathbf{c} = (1+\sqrt{m}, 1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

Aufgabe 45. Die Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}$ ist

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 10 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1231 & 0.9045 & -0.4082 \\ -0.4924 & 0.3015 & 0.8165 \\ -0.8616 & -0.3015 & -0.4082 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8.1240 & -9.6011 & -11.9399 & -29.6650 \\ 0 & 0.9045 & 1.5076 & 2.4121 \\ 0 & 0 & -0.4082 & -0.4082 \end{pmatrix},$$

und die Lösung ist $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Die Zwischenvektoren $\mathbf{v}$ und die Zahlen a sind:

$$\mathbf{v} = (0.7494, 0.3285, 0.5749)^{\mathrm{T}},\ a = -8.1240,\ \mathbf{v} = (-0.7399, -0.6727)^{\mathrm{T}},\ a = 0.9045,\ \mathbf{v} = 1,\ a = -0.4082.$$

Aufgabe 46. Die gesuchten Matrizen $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ bzw. $\mathbf{R}$ sind:

$$\begin{pmatrix}
-0.3162 & 0.9487 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.3162 & -0.1054 & 0.9428 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.3162 & -0.1054 & -0.1179 & 0.9354 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.3162 & -0.1054 & -0.1179 & -0.1336 & 0.9258 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.3162 & -0.1054 & -0.1179 & -0.1336 & -0.1543 & 0.9129 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.3162 & -0.1054 & -0.1179 & -0.1336 & -0.1543 & -0.1826 & 0.8944 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.3162 & -0.1054 & -0.1179 & -0.1336 & -0.1543 & -0.1826 & -0.2236 & 0.8660 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.3162 & -0.1054 & -0.1179 & -0.1336 & -0.1543 & -0.1826 & -0.2236 & -0.2887 & 0.8165 & 0.0000 \\
-0.3162 & -0.1054 & -0.1179 & -0.1336 & -0.1543 & -0.1826 & -0.2236 & -0.2887 & -0.4082 & 0.7071 \\
-0.3162 & -0.1054 & -0.1179 & -0.1336 & -0.1543 & -0.1826 & -0.2236 & -0.2887 & -0.4082 & -0.7071
\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}
-3.1623 & -2.8460 & -2.5298 & -2.2136 & -1.8974 & -1.5811 & -1.2649 & -0.9487 & -0.6325 & -0.3162 & -17.3925 \\
0 & -0.9487 & -0.8433 & -0.7379 & -0.6325 & -0.5270 & -0.4216 & -0.3162 & -0.2108 & -0.1054 & -4.7434 \\
0 & 0 & -0.9428 & -0.8250 & -0.7071 & -0.5893 & -0.4714 & -0.3536 & -0.2357 & -0.1179 & -4.2426 \\
0 & 0 & 0 & -0.9354 & -0.8018 & -0.6682 & -0.5345 & -0.4009 & -0.2673 & -0.1336 & -3.7417 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.9258 & -0.7715 & -0.6172 & -0.4629 & -0.3086 & -0.1543 & -3.2404 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9129 & -0.7303 & -0.5477 & -0.3651 & -0.1826 & -2.7386 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8944 & -0.6708 & -0.4472 & -0.2236 & -2.2361 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8660 & -0.5774 & -0.2887 & -1.7321 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8165 & -0.4082 & -1.2247 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071
\end{pmatrix}.$$

Die **QR**-Zerlegung geht in den folgenden Programmen über zwei Stufen. Zuerst wird mit einer elementaren Householder-Transformation ein Vektor bis auf die erste Komponente annuliert, daraus wird dann das Gesamtprogramm hergestellt.

Programm L23.1: Ein Schritt des Householder Verfahrens

```
%Es wird ein Schritt einer Householder-Transformation ausgefhrt
%        [a v]=househl(d); v,d sind Spaltenvektoren gleicher Lnge,
%                          d ist gegeben, a ist das neue Diagonalelement von A
function [a,v]=househl(d);
d2=norm(d);  %euklidische Norm
d1=d(1);
a=-sign(d1)*d2;
c=zeros(size(d));c(1)=a;
v=(d-c)/sqrt(2*d2*(d2+abs(d1)));
return;
```

Programm L23.2: Das Householder Verfahren

```
%Es wird eine Prozedur housholder.m hergestellt zur Zerlegung von A=Q'R mit Q
%orthogonal und R rechte Matrix. Auerdem wird das i.a. berbestimmte
%Gleichungssystem Ax=b gelst. A ist m x n mit m>= n-1,
%die rechte Seite b steht in der letzten Spalte von A.
%Das Programm geht auch fr komplexe Daten, da in diesem Fall
%der Transpositionsoperator "'" von matlab als "*" (transponieren
%und komplex konjugieren) ausgefhrt wird.
%braucht househl.m
function [abw,x,Q,R]=householder(A);
[m,n]=size(A); %die rechte Seite ist in A enthalten!
Q=eye(m);x=zeros(n-1,1);
for j=1:n-1
  d=A(j:m,j);A(j:m,j)=zeros(size(A(j:m,j)));
  [a,v]=househl(d);
  A(j,j)=a;
  H=eye(m-j+1)-2*v*v';
  Hou=eye(m);Hou(j:m,j:m)=H;
  Q=Hou*Q;
  A(j:m,j+1:n)=H*A(j:m,j+1:n);
end; %for j
R=A;
%Die Lsung x des Gleichungssystems ergibt sich aus  A(:,1:n-1)*x=A(:,n);
y=A(:,n);
x(n-1)=y(n-1)/A(n-1,n-1);
for j=n-2:-1:1
  x(j)=(y(j)-A(j,j+1:n-1)*x(j+1:n-1))/A(j,j);
end; %for j
%Die Abweichung ||Ax-b|| ergibt sich nach einer Formel auf S. 208
abw=norm(A(n:m,n));
return;
```

Der Aufruf kann etwa mit einem Programm der folgenden Art erfolgen:

Programm L23.3: Beispiele zum Householder Verfahren

```
%Es wird die Prozedur housholder mit verschiedenen Matrizen A getestet.
%Das Ergebnis ist $A=Q'*R, Q orthogonal, R obere Dreiecksmatrix.
%Das Gleichungssystem Ax=b wird gelst, b ist die letzte Spalte von A.
%m=100;
%A=ones(m,m+1);
%for j=1:m
%  A(j,j+1:m)=zeros(size(A(j,j+1:m)));A(j,m+1)=j;
%end; %for j %Testmatrix, Lsung ist x=1,1,...,1.
%load Daten -ascii; %Test mit Daten aus Aufgabe 44, Blatt 22
%z=ones(100,1);
%A=[z,Daten];
%braucht householder.m und househl.m

%Test auf komplexe Daten:
A=[1+i 2 3 6+i;4 5+2*i 6 15+2*i;7 8 10+3*i 25+3*i]; %Aufgabe 45
tic
[abw,x,Q,R]=householder(A);
toc
%dauert fr m=100, n=101: 6.4 sec auf Sun ultra1
```