Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

Bogen 21: Übungen am 16. Juni 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P61. Sei eine Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ mit einer gewissen Eigenschaft gegeben. Modifikationstechniken werden verwendet, wenn eine Zeile oder Spalte von $\mathbf{A}$ durch eine andere ersetzt wird und eine Zerlegung mit derselben Eigenschaft mit geringem Aufwand neu berechnet werden muß. Unter *Updating* versteht man eine entsprechende Technik, wenn in $\mathbf{A}$ eine Zeile oder Spalte hinzugefügt wird, unter *Downdating* versteht man Techniken, wenn aus $\mathbf{A}$ eine Zeile oder Spalte weggelassen wird. Die zuletzt genannten Techniken haben also nur einen Sinn, wenn $\mathbf{A}$ nicht notwendig quadratisch ist.

Aufgabe P62. (a) (Obere) Hessenbergform. (b) Man faßt die beiden Matrizen $\mathbf{H}, \mathbf{F}$ zu einer einzigen Matrix $\mathbf{C} := \begin{pmatrix} -36 & 30 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 48 & -60 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 19/3 & 5/3 & 5/4 & 1 \end{pmatrix}$ zusammen und wendet das Gaußsche Eliminationsverfahren (inkl. Spaltenpivotsuche) auf die ersten beiden (i. a. die ersten $m-1$) Spalten von $\mathbf{C}$ an. Im ersten Schritt verwenden wir 48 als Pivotelement müssen also die Zeilen 1 und 2 vertauschen und multiplizieren entsprechend mit $\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $l_2 = -36/48$. Das Ergebnis ist $\mathbf{G}_1\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 48 & -60 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 5 & 4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 5 & 19/3 & 5/3 & 5/4 & 1 \end{pmatrix}$. Jetzt verwenden wir -15 als Pivotelement, müssen also diesmal die Zeilen nicht vertauschen und multiplizieren entsprechend mit $\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_3 & 1 \end{pmatrix}$ mit $l_3 = -5/15$ und erhalten schließlich $\mathbf{C}' := (\mathbf{R}'|\mathbf{F}') = \begin{pmatrix} 48 & -60 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 5 & 4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{F}'\mathbf{A}' = \mathbf{R}'$. Es ist zu beachten, daß die Dreiecksstruktur von $\mathbf{F}$ verloren geht.

Aufgabe P63. (a) Formel (7.5′), Buch, S. 185. Man kann die Operatornorm von $\mathbf{A}$ auffassen als maximale Streckung der linearen Abbildung $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. (b) Zusätzlich zu den Normaxiomen muß $||\mathbf{AB}|| \le ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}||$ gelten. (c) $||\mathbf{A}||_p$ für $p = 1, 2, \infty$, Buch, S. 186–187, $||\mathbf{A}||_F^2 = \sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2$ (Frobeniusnorm), $||\mathbf{A}|| = n \max_{1\le j,k\le n} |a_{jk}|$, (d) $||\mathbf{A}||_1 = \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|$, Herleitung, Buch S. 186.

Aufgabe 41. Das Programm ist schon im Lösungsblatt 20 abgedruckt. Das erste Beispiel ist im Buch, S. 171 behandelt. Startet man im zweiten Beispiel mit $I = \{3, 4, 5, 6\}$, so erhält man nacheinander die Indexmengen $I = \{1, 4, 5, 6\}$, $I = \{1, 4, 5, 2\}$, $I = \{1, 4, 3, 2\}$ und die Zielfunktionswerte 0, -12500, -17000, -17200, und als Lösung $(40, 160, 10, 40, 0, 0)$.

Aufgabe 42. (a) Der Bereich liegt im ersten Quadranten und wird durch fünf Geraden berandet, die die x bzw. y Achse in den Punkten $2/j$ und $2j$ treffen. (b) Der Bereich ist berandet durch die Hyperbel $xy = 1$, $x > 0$ und beschrieben durch $xy \ge 1$, $x > 0$, also nicht geradlinig berandet. Setzt man nämlich in der Formel (21.1) $y = 1/x, x > 0$ ein, so erhält man $jx + 1/(jx)$. Setzen wir $a = jx$ für $jx > 0$, so ist immer $a + 1/a \ge 2$, denn $a + 1/a - 2 = (a-1)^2/a \ge 0$. Ist irgendwo $xy < 1$, $x, y > 0$, so setze man $j = y$, und erhält $xy + 1 < 2$, d. h. $xy < 1$ gehört nicht zum zulässigen Bereich. (c) Im Bereich (a) hat $x = \min$ eine Lösung. Das Minimum wird an der Ecke $(x, y) = (0, 6)$ angenommen, die Zielfunktion hat dort den Wert Null. Im Bereich (b) gibt es keine Lösung, denn $\inf x = 0$, aber dieses Infimum wird nicht im zulässigen Bereich angenommen.