Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

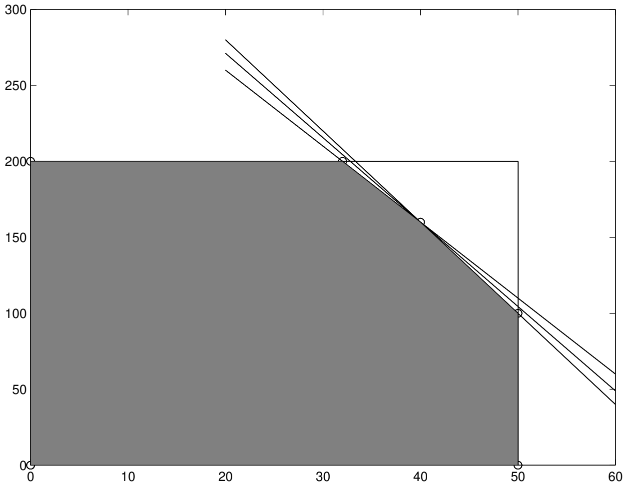
Bogen 20: Übungen am 9. Juni 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P58. Kanonische Form: mit Gleichungen und Vorzeichenbeschränkungen, Lösungskriterium: alle $t_j \le 0$ für $j \notin I$, Formeln sind im Buch nachzusehen.

Aufgabe P59. Alle $d_{jr} \le 0$ für $j \in I$, r fest (Pivotspalte).

Aufgabe P60. Die Lösung ergibt sich aus der Figur 20.1. Sie liegt bei $x_1 = 40$, $x_2 = 160$ mit Zielfunktionswert $= -17200$.



Figur 20.1: Zulässiger Bereich aus Aufgabe P60.

Aufgabe 39. (a) Das Problem D ist äquivalent zu

$$\mathrm{D}': \quad \begin{cases} -\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \min, \\ -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge -\mathbf{c}, \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}. \end{cases} \qquad \text{Daraus folgt} \qquad \mathrm{P}': \quad \begin{cases} -\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \max, \\ -\mathbf{A}\mathbf{x} \le -\mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}. \end{cases}$$

Wir sehen, P' ist mit P äquivalent. (b) Man multipliziere in P die erste Ungleichung mit $\mathbf{y}$ und in D die erste Ungleichung mit $\mathbf{x}$. Wegen der Zulässigkeit bleiben die bestehenden Ungleichungen erhalten und

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \le \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \le \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}.$$

Der mittlere Teil stimmt überein, weil es sich um Zahlen handelt, die man ohne Änderung transponieren darf. (c) Die Voraussetzungen bedeuten, daß beide Probleme zulässige Vektoren enthalten. Unlösbarkeit ist in diesem Fall nur möglich, wenn die Zielfunktion in P nach unten und die Zielfunktion von D nach oben unbeschränkt sind. Das ist aber durch die angegebene Ungleichung ausgeschlossen.

Aufgabe 40. Die Lösung wird bereits nach 2 Schritten erreicht.
Schritt 1: $I = \{3,4,5\}, \mathbf{B} = \mathbf{I}, \mathbf{c} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{s} = \mathbf{0}, \mathbf{t} = (t_1, t_2) = (-5,-8)^{\mathrm{T}}, t_{\min} = t_2 = -8 < 0, r = 2, \mathbf{d} = \mathbf{a}^2 = (1,6,1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{x} = \mathbf{b} = (12,400,50)^{\mathrm{T}}, \delta = 12 = x_3/d_3, s = 3.$
Schritt 2: $I = \{2,4,5\}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = (-8,0,0)^{\mathrm{T}}, \mathbf{y} = (-8,0,0)^{\mathrm{T}}, \mathbf{s} = (-8,-8,-8,0,0), \mathbf{t} = (t_1,t_3) = (3,8)^{\mathrm{T}}, t_{\min} = t_1 = 3 \ge 0, \mathbf{x} = (12,328,38)^{\mathrm{T}}, \tilde{\mathbf{x}} = (0,12,0,328,38)^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = -96.$ Die Lösung kann mit dem angegebenen matlab-Programm 20.1 hergestellt werden:

Programm 20.1: Ein Schritt des Simplexverfahrens.

```
%Auf das Problem         c^T*x=min,
%                        Ax=b,  A mxn mit m<n, Rang A=m
%                        x>=0,  n-Vektor
%wird ein Schritt des Simplexalgorithmus ausgefhrt, allein unter
%Kenntnis einer Indexmenge I={i_1,i_2,...,i_m} mit 1<=i_k<=n in der Form
%function [lo,Text,Ineu,Ziel,x]=simplex(A,b,c,Ialt);
%klappt so. Programm Gerhard Opfer, 26. Mai 1998.
 function [lo,Text,Ineu,Ziel,x]=simplex(A,b,c,Ialt);
[m,n]=size(A);
B=A(:,Ialt);     %mxm-Matrix
ctilde=c(Ialt);  %m-Vektor
y=B'\ctilde;     %m-Vektor
s=A'*y;          %n-Vektor
t=c-s;           %n-Vektor
Ikomplement=1:n;
Ikomplement(Ialt)=[];
t=t(Ikomplement);
[tmin,r]=min(t);
r=Ikomplement(r);
x=zeros(n,1);    %n-Vektor
if tmin>=0
  Text='Lsung erreicht';
  lo=1;
  xtilde=B\b;    %m-Vektor
  Ziel=ctilde'*xtilde;
  x(Ialt)=xtilde;
  Ineu=Ialt;
  return;
end; %if
a=A(:,r);        %die r-te Spalte von A, m-Vektor
L=B\[a b];       %Lsung von 2 Gleichungssystemen
d=L(:,1);        %m-Vektor
xtilde=L(:,2);   %m-Vektor
Ziel=ctilde'*xtilde;
x(Ialt)=xtilde;  %n-Vektor
J=find(d>0);
if isempty(J)
  Text='Problem unlsbar';
  lo=-1;
  return; else
  [delta,s]=min(xtilde(J)./d(J));
end; %if
Ialt(J(s))=r;  %Vertauschung
Ineu=Ialt;
Text='Lsung noch nicht erreicht';
lo=0;
return;
```