**Numerische Mathematik für StudentInnen**
**mit Ziel Diplom in Mathematik**

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

---

**Bogen 15: Übungen am 28. April 1998**

**Lösungshinweise**

---

**Aufgabe P43.** Wir fassen $\mathbf{A}$ mit der rechten Seite $\mathbf{b}$ zu einer Matrix $\mathbf{A}^{(0)} := (\mathbf{A}|\mathbf{b})$ zusammen. Dann ist

$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -11 & -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man durch Rückwärtseinsetzen $x_3 = 1/1 = 1$, $x_2 = (-6 + 6x_3)/(-3) = 0$, $x_1 = (2 - 2x_2 - 3x_3)/1 = -1$ also, $\mathbf{x} = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ und

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Lambda}_0\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe P44.** Das Vorgehen bei Zeilenvertauschungen kann so beschrieben werden. Wir starten mit $\mathbf{A}^{(0)} := \mathbf{A}$ und machen eine Zeilenvertauschung, die wir durch eine Permutationsmatrix $\mathbf{P}_0$ in der Form $\tilde{\mathbf{A}}^{(0)} := \mathbf{P}_0\mathbf{A}^{(0)}$ beschreiben können (vergleichen Sie Aufgabe 29). In der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}^{(0)}$ eliminieren wir in der üblichen Form $\mathbf{L}_0\tilde{\mathbf{A}}^{(0)} := \mathbf{A}^{(1)}$ alle Elemente unterhalb des Diagonalelements. Zusammengefaßt

$$\mathbf{A}^{(0)} := \mathbf{A}, \quad \tilde{\mathbf{A}}^{(j)} := \mathbf{P}_j\mathbf{A}^{(j)}, \quad \mathbf{L}_j\tilde{\mathbf{A}}^{(j)} := \mathbf{A}^{(j+1)}, j = 0, 1, \ldots, n-2 \Rightarrow \mathbf{R} := \mathbf{A}^{(n-1)} = \mathbf{L}_{n-2}\mathbf{P}_{n-2}\cdots\mathbf{L}_0\mathbf{P}_0\mathbf{A}.$$

Es ist zu beachten, daß die Permutationsmatrizen $\mathbf{P}_j$ nur jeweils zwei Zeilen vertauschen, also $\mathbf{P}_j^{-1} = \mathbf{P}_j$, und darüberhinaus vertauscht $\mathbf{P}_j$ die Zeile $j+1$ mit einer Zeile $\geq j+1$. Es folgt also mit $\mathbf{L}_j^{-1} = \mathbf{\Lambda}_j$, daß

(L15.1) $$\mathbf{A} = \mathbf{P}_0\mathbf{\Lambda}_0\cdots\mathbf{P}_{n-2}\mathbf{\Lambda}_{n-2}\mathbf{R} =: \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{R}.$$

Wir setzen dabei

(L15.1a) $$\tilde{\mathbf{\Lambda}} := \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0\cdots\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{n-2} \text{ mit } \tilde{\mathbf{\Lambda}}_j := \mathbf{P}_j\mathbf{\Lambda}_j,\ j = 0, 1, \ldots, n-2,$$

und es ist zu beachten, daß $\tilde{\mathbf{L}}$ keine untere Dreiecksmatrix ist. Aufgrund der speziellen Struktur der $\mathbf{P}_j$ ist jedoch (selber nachrechnen!)

(L15.1b) $$\hat{\mathbf{L}} := \hat{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{L}} \text{ mit } \hat{\mathbf{P}} := \mathbf{P}_{n-2}\cdots\mathbf{P}_0$$

wiederum eine untere Dreiecksmatrix. Statt $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{R}$ könnten wir daher auch

(L15.1c) $$\hat{\mathbf{L}}\mathbf{R} = \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A} =: \hat{\mathbf{A}}$$

schreiben. In diesem Fall ist also $\hat{\mathbf{L}}\mathbf{R}$ eine übliche $LR$-Zerlegung der (Zeilen-)permutierten Matrix $\hat{\mathbf{A}}$. Wir kommen jetzt zum Beispiel zurück. Wir vertauschen die letzte mit der ersten Zeile von $\mathbf{A}^{(0)}$ und erhalten dann

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 & 3 \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{11}{7} & \frac{11}{7} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 1 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir vertauschen jetzt die zweite mit der letzten Zeile von $\mathbf{A}^{(1)}$, also

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 & 3 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{11}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 & 3 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{11}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{\Lambda}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0\tilde{\mathbf{\Lambda}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß in den Matrizen $\mathbf{\Lambda}_j, \tilde{\mathbf{\Lambda}}_j$ dieser Aufgabe keine Elemente dem Betrage nach $> 1$ vorkommen.

**Aufgabe P45.** Bei totaler Pivotsuche machen wir in jedem Schritt eine Zeilenvertauschung (dargestellt durch $\mathbf{P}_j$) und eine Spaltenvertauschung ($\mathbf{Q}_j$). Sei wieder $\mathbf{A}^{(0)} := \mathbf{A}$, dann ist

$\tilde{\mathbf{A}}^{(j)} := \mathbf{P}_j\mathbf{A}^{(j)}\mathbf{Q}_j, \mathbf{L}_j\tilde{\mathbf{A}}^{(j)} := \mathbf{A}^{(j+1)}, j = 0,1,\ldots,n-2 \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{A}^{(n-1)} = \mathbf{L}_{n-2}\mathbf{P}_{n-2}\cdots\mathbf{L}_0\mathbf{P}_0\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\cdots\mathbf{Q}_{n-2}$.

Daraus folgt unter Beachtung von $\mathbf{L}_j^{-1} = \mathbf{\Lambda}_j$, $\mathbf{P}_j^{-1} = \mathbf{P}_j$, $\mathbf{Q}_j^{-1} = \mathbf{Q}_j$, daß

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_0\mathbf{\Lambda}_0\cdots\mathbf{P}_{n-2}\mathbf{\Lambda}_{n-2}\mathbf{R}\mathbf{Q}_{n-2}\cdots\mathbf{Q}_0 =: \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{Q}}. \tag{L15.2}$$

Wir setzen dabei

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_j := \mathbf{P}_j\mathbf{\Lambda}_j, \quad \tilde{\mathbf{L}} := \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0\cdots\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{n-2}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} := \mathbf{Q}_{n-2}\cdots\mathbf{Q}_0.$$

Multiplizieren wir die Gleichung (L15.2) von links mit $\hat{\mathbf{P}}$ aus (L15.1b) und von rechts mit $\hat{\mathbf{Q}} := (\tilde{\mathbf{Q}})^{-1} = \mathbf{Q}_0\cdots\mathbf{Q}_{n-2}$, so erhalten wir die $LR$-Zerlegung in der Form

$$\hat{\hat{\mathbf{A}}} := \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{R}. \tag{L15.3}$$

Nun zum Beispiel. Wir vertauschen Spalte 1 mit Spalte 3 und Zeile 1 mit Zeile 3.

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 & 3 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt vertauschen wir Spalten 2 und 3 und Zeilen 2 und 3.

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{11}{10} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{11}{10} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{10}{55} & 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{\Lambda}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{55} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{10}{55} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Q}}_1\tilde{\mathbf{Q}}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist in vertauschter Form $\tilde{\mathbf{x}} = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$. Da wir die Spaltenvertauschungen $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 3$ vorgenommen haben, ist also $\tilde{\mathbf{x}} = (x_3, x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$.

**Aufgabe 29.** (i) (a) $\mathbf{P}$ gehe aus der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ dadurch hervor, daß die $j$-te und die $k$-te Spalte vertauscht werden. Dann vertauscht $\mathbf{PA}$ die Zeilen $j$ und $k$ von $\mathbf{A}$. Insbesondere ist $\mathbf{P}\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_m\mathbf{P}$, d. h. die Zeilenvertauschung in $\mathbf{I}_m$ ist gleichzeitig auch eine Spaltenvertauschung. Daher ist auch $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_m$.
(b) $\mathbf{P}$ gehe aus der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dadurch hervor, daß die $j$-te und die $k$-te Spalte vertauscht werde. Dann vertauscht $\mathbf{AP}$ die Spalten $j$ und $k$ von $\mathbf{A}$.
(ii) (a) Sei $k \to i_k, k = 1,2,\ldots,m$ eine gegebene Permutation und $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, so daß in Spalte $k$ der $i_k$-te Einheitsvektor vom $\mathbb{R}^m$ steht. Dann vertauscht $\mathbf{PA}$ diese Zeilen von $\mathbf{A}$. (b) Sei $k \to i_k, k = 1,2,\ldots,n$ eine gegebene Permutation und $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so daß in Spalte $k$ der $i_k$-te Einheitsvektor vom $\mathbb{R}^n$ steht. Dann vertauscht $\mathbf{AP}$ diese Spalten von $\mathbf{A}$. Steht in *Spalte* $k$ von $\mathbf{P}$ der $i_k$-te Einheitsvektor, so steht in *Zeile* $i_k$ von $\mathbf{P}$ der $k$-te Einheitsvektor, $k = 1,2,\ldots,n$. Es gilt also $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$. Beispiel: $\mathbf{P}_z$ beschreibe die gegebenen Zeilen-, $\mathbf{P}_s$ die gegebenen Spaltenvertauschungen, also

$$\mathbf{P}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

und

$$\mathbf{P}_z\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AP}_s = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 30.** Die Lösung ist $\mathbf{x} = (-2,-1,1,2)^{\mathrm{T}}$. Das Programm kann durch einen Zusatz aus dem Programm 5.3 des Buches hergestellt werden. An der maximalen Maschinengenauigkeit fehlen voraussichtlich einige Stellen, da die gegebene Matrix eine große Kondition ($\approx 1.5\cdot 10^4$) hat. Das ist ein Faktor, mit dem die Rundungsfehler vergrößert werden. Das Programm mit einigen Testergebnissen ist angehängt.

```
{Aus dem Buch, Kap. 5}
program gauss;
const M=10;N=10;
type matrix=array[1..M,1..N] of real;
     vektor=array[1..M] of integer;
var A:matrix;Merk:vektor;
    j,m,n:integer;

procedure elimination(m,n:integer;var a:matrix);
{Eine Matrix a mit m Zeilen und n >= m Spaltem wird ohne Pivotsuche
in Dreisckform berfhrt. In die linke Hlfte von a werden die
Pivotelement gespeichert}
var i,j,k:integer;
begin
   for k:=1 to m-1 do {Hier  beginnt die Gauss-Elimination*******}
   for i:=k+1 to m do
   begin
     a[i,k]:=a[i,k]/a[k,k];
     for j:=k+1 to n do
     begin
       a[i,j]:=a[i,j]-a[i,k]*a[k,j];
     end;
   end;
end; {elimination}

procedure elimination_mit_PivotsucheA(m,n:integer;var a:matrix;var I:vektor);
{Eine Matrix a mit m Zeilen und n >= m Spaltem wird mit  Spalten-Pivotsuche
in Dreisckform berfhrt. In die linke Hlfte von a werden die
Pivotelement gespeichert. Die Vertauschungen werden in I notiert.}
var i,j,k,ell,pivot,hi,hk:integer; h,max:real;
begin
  for k:=1 to m do I[k]:=k;
  for k:=1 to m-1 do
{========================================}
  begin
    max:=0;
    for ell:=k to m do
    begin
      h:=abs(a[I[ell],k]);
      if h>max then
      begin
        max:=h;pivot:=I[ell];hi:=ell;
      end; {if}
    end; {for ell}
    hk:=I[k];I[k]:=pivot;I[hi]:=hk;
{========================================}
    for i:=k+1 to m do
    begin
      a[I[i],k]:=a[I[i],k]/a[I[k],k];
      for j:=k+1 to n do
      begin
        a[I[i],j]:=a[I[i],j]-a[I[i],k]*a[I[k],j];
      end; {for j}
    end; {for i}
  end; {for k}
end; {elimination}

procedure elimination_mit_PivotsucheB(m,n:integer;var a:matrix;var I:vektor);
{Eine Matrix a mit m Zeilen und n >= m Spaltem wird mit  Spalten-Pivotsuche
in Dreisckform berfhrt. In die linke Hlfte von a werden die
Pivotelement gespeichert. Die Zeilenvertauschungen werden
tatschlich ausgefhrt.}
var i,j,k,ell,pivot,hk:integer; h,max:real;
begin
  for k:=1 to m do I[k]:=k;
  for k:=1 to m-1 do
{========================================}
  begin
    max:=0;
    for ell:=k to m do
    begin
      h:=abs(a[ell,k]);
      if h>max then
      begin
        max:=h;pivot:=ell;
      end; {if}
    end; {for ell}
    if pivot>k then
    begin {bei pivot=k ist Vertauschung nicht ntig}
      for ell:=1 to n do
```

```
      begin {Zeile k wird mit Zeile pivot vertauscht}
        h:=a[k,ell]; a[k,ell]:=a[pivot,ell];a[pivot,ell]:=h;
      end; {for ell}
      hk:=I[k];I[k]:=pivot;I[pivot]:=hk;
    end; {if}
{==========================================}
    for i:=k+1 to m do
    begin
      a[i,k]:=a[i,k]/a[k,k];
      for j:=k+1 to n do
      begin
        a[i,j]:=a[i,j]-a[i,k]*a[k,j];
      end; {for j}
    end; {for i}
  end; {for k}
end; {elimination}

procedure Daten_eintragen(m,n:integer;var A:matrix);
var j,k:integer;
begin
for j:=1 to m do
for k:=1 to n do A[j,k]:=0;
if m=4 then
begin
  A[1,1]:=  16;A[1,2]:= -120;A[1,3]:=  240;A[1,4]:= -140;A[1,5]:=  48;
  A[2,1]:=-120;A[2,2]:= 1200;A[2,3]:=-2700;A[2,4]:= 1680;A[2,5]:=-300;
  A[3,1]:= 240;A[3,2]:=-2700;A[3,3]:= 6480;A[3,4]:=-4200;A[3,5]:= 300;
  A[4,1]:=-140;A[4,2]:= 1680;A[4,3]:=-4200;A[4,4]:= 2800;A[4,5]:=   0;
  {Lsung ist (-2,-1,1,2)}
end else
begin
A[1,1]:=    49;A[1,2]:=   -1176;A[1,3]:=     8820;A[1,4]:=   -29400;A[1,5]:=     48510;A[1,6]:=    -38808;
A[2,1]:= -1176;A[2,2]:=   37632;A[2,3]:=  -317520;A[2,4]:=  1128960;A[2,5]:=  -1940400;A[2,6]:=   1596672;
A[3,1]:=  8820;A[3,2]:= -317520;A[3,3]:=  2857680;A[3,4]:=-10584000;A[3,5]:=  18711000;A[3,6]:= -15717240;
A[4,1]:=-29400;A[4,2]:= 1128960;A[4,3]:=-10584000;A[4,4]:= 40320000;A[4,5]:= -72765000;A[4,6]:=  62092800;
A[5,1]:= 48510;A[5,2]:=-1940400;A[5,3]:= 18711000;A[5,4]:=-72765000;A[5,5]:= 133402500;A[5,6]:=-115259760;
A[6,1]:=-38808;A[6,2]:= 1596672;A[6,3]:=-15717240;A[6,4]:= 62092800;A[6,5]:=-115259760;A[6,6]:= 100590336;
A[7,1]:= 12012;A[7,2]:= -504504;A[7,3]:=  5045040;A[7,4]:=-20180160;A[7,5]:=  37837800;A[7,6]:= -33297264;

A[1,7]:=    12012;
A[2,7]:=  -504504;
A[3,7]:=  5045040;
A[4,7]:=-20180160;
A[5,7]:= 37837800;
A[6,7]:=-33297264;
A[7,7]:= 11099088;

A[1,8]:=     315;
A[2,8]:=  -14784;
A[3,8]:=  162540;
A[4,8]:= -705600;
A[5,8]:= 1420650;
A[6,8]:=-1330560;
A[7,8]:=  468468; {Lsung ist (-3,-2,-1,0,1,2,3)}
end; {else}
end; {Daten_eintragen}

procedure rueckwaerts_einsetzen(m,n:integer;var R:matrix;Merk:vektor);
{Die Lsung steht in R in den Spalten m+1,m+2,...,n}
var i,j,k:integer; S:real;
begin
for k:=m+1 to n do {mehrere rechte Seiten}
begin
  for j:=m downto 1 do
  begin
    S:=R[Merk[j],k];
    for i:=j+1 to m do
      S:=S-R[Merk[j],i]*R[Merk[i],k];
    R[Merk[j],k]:=S/R[Merk[j],j];
  end; {for j}
end; {for k}
end; {rueckwaerts_einsetzen}

procedure loesung_zeigen(m,n:integer;X:matrix;I:vektor);
{Die Lsung wird in den Spalten der Lnge m
in den Zeilen m+1,m+2,...,n von X erwartet}
var j,k:integer;
begin
  for j:=1 to m do
  begin
```

```
  for k:=m+1 to n do
    write(X[I[j],k]:17:14,' ');
  writeln;
  end; {for j}
end; {loesung_zeigen}

procedure matrix_zeigen(m,n:integer;A:matrix);
{Wird nur zum Testen gebraucht}
var j,k:integer;
begin
for j:=1 to m do
begin
for k:=1 to n do
  write(A[j,k]:10:2,' ');
writeln;
end;
writeln;
end; {matrix_zeigen}

procedure merkvektor_initialisieren(m:integer;var I:vektor);
var j:integer;
begin
  for j:=1 to m do I[j]:=j;
end; {merkvektor_initialisieren}

procedure merkvektor_zeigen(m:integer;I:vektor);
var j:integer;
begin
  for j:=1 to m do write(I[j]:2,' ');writeln;
end; {merkvektor_zeigen}

begin {Hauptprogramm}
  {m:=7;n:=8;}
  m:=4;n:=5;
  writeln('Test 1: keine Pivotsuche');
  Daten_eintragen(m,n,A);
  elimination(m,n,A);
  merkvektor_initialisieren(m,Merk);
  rueckwaerts_einsetzen(m,n,A,Merk);
  loesung_zeigen(m,n,A,Merk);

  writeln('Test 2: Pivotsuche mit Merkvektor');
  Daten_eintragen(m,n,A);
  elimination_mit_PivotsucheA(m,n,A,Merk);
  rueckwaerts_einsetzen(m,n,A,Merk);
  loesung_zeigen(m,n,A,Merk);
  merkvektor_zeigen(m,Merk);

  writeln('Test 3: Pivotsuche mit tatschlicher Vertauschung');
  Daten_eintragen(m,n,A);
  elimination_mit_PivotsucheB(m,n,A,Merk);
  merkvektor_zeigen(m,Merk);
  merkvektor_initialisieren(m,Merk);
  rueckwaerts_einsetzen(m,n,A,Merk);
  loesung_zeigen(m,n,A,Merk);
end.
{Testergebnisse: Zuerst Aufgabe:
Test 1: keine Pivotsuche
-1.99999999999998
-0.99999999999999
 1.00000000000001
 2.00000000000001
Test 2: Pivotsuche mit Merkvektor
-2.00000000000012
-1.00000000000009
 0.99999999999992
 1.99999999999993
 3  2  4  1
Test 3: Pivotsuche mit tatschlicher Vertauschung
 3  2  4  1
-2.00000000000012
-1.00000000000009
 0.99999999999992
 1.99999999999993
Pivotsuche liefert keine besseren Resultate

Testergebnisse: Inverse 7x7 Hilbertmatrix:
Test 1: keine Pivotsuche
-3.00000000062083
-2.00000000053218
```

```
-1.00000000046566
-0.00000000041391
 0.99999999962748
 1.99999999966134
 2.99999999968956
Test 2: Pivotsuche mit Merkvektor
-2.99999999993365
-1.99999999994179
-0.99999999994824
 0.00000000004659
 1.00000000004236
 2.00000000003883
 3.00000000003584
 5  4  6  2  3  7  1
Test 3: Pivotsuche mit tatschlicher Vertauschung
 5  4  6  2  6  7  1
-2.99999999993365
-1.99999999994179
-0.99999999994824
 0.00000000004659
 1.00000000004236
 2.00000000003883
 3.00000000003584
Pivotsuche verbessert Ergebnisse um etwa eine Stelle
}
```