Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

Bogen 14: Übungen am 21. April 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P40. $n=1: \; F(x) := \mathrm{e}^{-x} - x = 1, \quad n=2: F(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &:= \mathrm{e}^x \cos y - x = 1, \\ f_2(\mathbf{x}) &:= \mathrm{e}^x \sin y - y = 0. \end{aligned} \tag{L14.1}$$

Linear: $F(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha F(\mathbf{x}) + \beta F(\mathbf{y})$, dazu muß jedes einzelne f_j eine Linearkombination der Komponenten von $\mathbf{x}$ sein. F ist also eine $(n \times n)$-Matrix. Homogen: F linear und $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Aufgabe P41. Der wesentliche Satz kann so formuliert werden: Gibt es eine lineare Abhängigkeit zwischen den Zeilen von $\mathbf{A}$, so ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn dieselbe lineare Abhängigkeit auch zwischen den Komponenten der rechten Seite $\mathbf{b}$ besteht. Das kann man auch so ausdrücken: Das Gleichungssystem (14.3) ist genau dann lösbar, wenn die Ränge der beiden Matrizen $\mathbf{A}$ und $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ übereinstimmen. Insbesondere ist das homogene Gleichungssystem immer lösbar.

Aufgabe P42. Seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Das lineare Gleichungssystem (14.3) ist genau dann (unabhängig von der rechten Seite $\mathbf{b}$) eindeutig lösbar, wenn $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = 2$ oder äquivalent $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Hat die Matrix nicht den Rang zwei, so ist das Gleichungssystem (14.3) mehrdeutig lösbar, wenn $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$ und andernfalls gar nicht lösbar.

Aufgabe 27. Das aus dem Buch modifiziert abgeschriebene Programm sieht so aus:

```
program adaptive_gauss;
{Integration von f ber [a,b]}
{Das Ausgangsintervall und die resultierenden Teilintervalle}
{werden solange halbiert, bis der Gesamtfehler hinreichend klein ist}
{In den Teilintervallen wird jeweils Gau-Zweipunkteformel verwendet}
const  eps=0.0005; {eps ist die vorgegebene Genauigkeit} alpha=0.1;
var    a,b,l,integral,pihalbe: real;
       globalzeler,zehler:integer;
       datei:text; {Zum Ablagern der Ergebnisse}

function f0(x: real): real;
{f ist die zu integrierende Testfunktion aus dem Buch, S. 97}
{f ist in [0,alpha] konstant = 1/alpha, und fr x > 1/alpha ist f(x)=1/x}
begin
  globalzeler:=globalzeler+1;
  if  x < alpha  then  f0:=1/alpha  else  f0:=1/x
end;  { f0 }

function f1(x: real): real;
begin
  globalzeler:=globalzeler+1;
  f1:=sin(pihalbe*x);
end;  { f1 }

function f2(x: real): real;
begin
  globalzeler:=globalzeler+1;
  f2:=sqrt(x);
end;  { f2 }

function f3(x: real): real;
begin
  globalzeler:=globalzeler+1;
  f3:=1/sqrt(x);
```

```
end;  { f3 }

{function f4(x: real): real;
var y:real;
begin
  globalzeler:=globalzeler+1;
  y:=exp(-0.9*ln(x));
  f4:=sin(y);} {f4:=sin(x^-0.9);}
{end;}  { f4 }

function f(x: real): real;
begin
  f:=f1(x);
end;  { f }

function gauss(a,b: real) : real;
{Gau-Formel fr zwei Punkte, Buch 2. Aufl., S. 107, Formel 4.48}
var M,b0:real;
begin
   M:=0.5*(a+b);
   b0:=(b-a)*sqrt(3)/6;
   gauss:=(f(M-b0)+f(M+b0))*(b-a)/2;
end;  { gauss }

function adaption(a,b,p: real) : real;
var c,h,ac_integral,cb_integral,q: real;
begin
  c:=(a+b)/2;
  h:=b-a;
  ac_integral:=gauss(a,c);
  cb_integral:=gauss(c,b);
  q:=ac_integral+cb_integral;
  writeln(p:10,' ',q:10,' ',q-p:10);
  if abs(q-p) > h*l             {*  Bedingung (4.33)  *}
  {if abs((q-p)/q) > h*l}       {*  Bedingung (4.33) modifiziert  *}
  then adaption:=adaption(a,c,ac_integral)+adaption(c,b,cb_integral)
  else
  begin
    zehler:=1+zehler;
    writeln(datei,zehler:4,a:12:6,b:12:6,h:12:6);
{   writeln(zehler:4,a:12:6,b:12:6,h:12:6);}
    adaption:=q;
  end;
end;  { adaption }

begin {  Hauptprogramm  }
  globalzeler:=0;
  pihalbe:=arctan(1)*2;
  rewrite(datei,'adaption.erg');
  a:=0;  b:=1;  zehler:=0;
  l:=15*eps/(b-a);
  {  die globale Variable l dient zum Testen von (4.33)  }
  writeln(datei,'   i     x[i-1]       x[i]        h[i] ');
  writeln(datei,'  -------------------------------------');
  integral:=adaption(a,b,gauss(a,b));
  writeln(datei);
  writeln(datei,'          berechnetes Integral: ',integral:10:6);
 {writeln(datei,'              exaktes Integral: ',1-ln(alpha):10:6);}{f0}
  writeln(datei,'              exaktes Integral: ',1/pihalbe:10:6);{f1}
  {writeln(datei,'             exaktes Integral: ',2/3:10:6)};{f2}
  {writeln(datei,'             exaktes Integral: ',2:10);}{f3}
  writeln(datei,'Zahl der Funktionsauswertungen: ',globalzeler:10);
  close(datei);
end.
```

Es erzeugt die folgenden Lösungen

```
Testfunktion aus dem Buch mit Zweipunktgauformel

   i     x[i-1]       x[i]        h[i]
  -------------------------------------
   1    0.000000    0.062500    0.062500
   2    0.062500    0.093750    0.031250
   3    0.093750    0.097656    0.003906
   4    0.097656    0.099609    0.001953
   5    0.099609    0.101562    0.001953
   6    0.101562    0.109375    0.007812
   7    0.109375    0.125000    0.015625
   8    0.125000    0.250000    0.125000
   9    0.250000    0.500000    0.250000
  10    0.500000    1.000000    0.500000
```

```

      berechnetes Integral:       3.302372
          exaktes Integral:       3.302585
Zahl der Funktionsauswertungen:         78

================================================
Testfunktion sin(pi/2*x) in [0,1]

   i     x[i-1]       x[i]        h[i]
  --------------------------------------
   1    0.000000    1.000000    1.000000

          berechnetes Integral:   0.636563
              exaktes Integral:   0.636620
Zahl der Funktionsauswertungen:          6

================================================
Testfunktion sqrt x in [0,1]

   i     x[i-1]       x[i]        h[i]
  --------------------------------------
   1    0.000000    0.125000    0.125000
   2    0.125000    0.250000    0.125000
   3    0.250000    0.500000    0.250000
   4    0.500000    1.000000    0.500000

          berechnetes Integral:   0.666783
              exaktes Integral:   0.666667
Zahl der Funktionsauswertungen:         30

================================================
Testfunktion 1/sqrt x in [0,1] funktioniert nicht ordentlich,
da bei Null zu viel verfeinert wird. Dito hnliche Funktionen.
```

Aufgabe 28. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (mit mindestens zwei Punkten) und w eine auf I definierte Gewichtsfunktion. Wir setzen $m_j(x) := x^j$. Dann ist

$$< m_{2j}, m_{2k} >:= \int_I w(x) m_{2j}(x) m_{2k}(x)\,\mathrm{d}x > 0 \text{ für } j \neq k.$$

Die Bedingung $< m_{2j}, m_{2k} >= 0$ kann also für $j \neq k$ nicht erfüllt werden.