Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

Bogen 13: Übungen am 14. April 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P37. (a) durch Integration von Interpolationspolynomen, (b) Mittelpunktsformel, Trapezregel, Simpsonsregel, (c) durch Zusammensetzen.

Aufgabe P38. (a) $I_n(f) \to I(f)$ für *alle* $f \in \mathrm{C}[a,b]$, (b) $I_n(p) \to I(p)$ für *alle* Polynome p, *und* für alle Gewichte w_j gilt: $w_j \geq 0$.

Aufgabe P39. (a) Wir bezeichnen mit I_h eine Formel vom Typ (4.9) wobei h die *Maschenweite* bedeutet. Das ist der größte Abstand zwischen benachbarten Knoten wobei bei dieser Messung auch die Intervallendpunkte als Knoten gezählt werden. Wir setzen eine Entwicklung der Form (4.30) voraus und bilden eine Linearkombination von I_h und $I_{h/2}$ so, daß der erste Entwicklungsterm von (4.30) verschwindet. (b) Man verfeinere das Gitter da, wo die zu integrierende Funktion f kritisch ist (Singularität, Oszillation). Details im Programm 4.17, S. 96. (c) Man bestimme die Knoten so, daß die Formel eine möglichst hohe Ordnung hat. (d) (i) Benutzung von Integrationsformeln, die nicht an den singulären Stellen auswerten, (ii) Abziehen der Singularität, (iii) Gaußformelm mit Singularität im Gewicht.

Aufgabe 25. (a) Aus (13.1) folgt:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(-1+3x^2), \quad P_3 = \frac{1}{2}(-3x+5x^3), \quad P_4 = \frac{1}{8}(3-30x^2+35x^4),$$
$$P_5 = \frac{1}{8}(15x-70x^3+63x^5), \quad P_6 = \frac{1}{16}(-5+105x^2-315x^4+231x^6).$$

(b) Sei h_n der Höchstkoeffizient von P_n. Dann ist nach (13.1) $(n+1)h_{n+1} = (2n+1)h_n$ und $h_1 = 1$. Also

(L13.1) $$h_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}h_n = \frac{2n+1}{n+1}\frac{2n-1}{n}h_{n-1} = \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 1}{(n+1)!} \text{ oder } h_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}.$$

(c) Es ist definitionsgemäß

(L13.2) $$\int_{-1}^{1} P_j(x)P_k(x)\,\mathrm{d}x = d_j\delta_{jk}, \quad j,k = 0,1,\ldots$$

mit $d_j > 0$. Setzen wir $x = 2y-1$, so ist

(L13.3) $$\int_{-1}^{1} P_j(x)P_k(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 P_j(2y-1)P_k(2y-1)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 P_j^*(x)P_k^*(x)\,\mathrm{d}x = d_j\delta_{jk}, \quad j,k = 0,1,\ldots$$

Ersetzen wir in (13.1) x durch $2y-1$, so erhalten wir die neue Rekursionsformel

(L13.4) $$\frac{n+1}{4n+2}P_{n+1}^*(x) = \big(x - \frac{2n+1}{4n+2}\big)P_n^*(x) - \frac{n}{4n+2}P_{n-1}^*(x), \; n = 0,1,\ldots, \; P_{-1}^* = 0, \; P_0^* = 1.$$

Aufgabe 26. Da P_{2n} eine gerade Funktion ist*, gilt mit (L13.2)

$$\int_{-1}^{1} P_{2j}(x)P_{2k}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 P_{2j}(x)P_{2k}(x)\,\mathrm{d}x$$

(L13.5) $$= \int_0^1 \frac{P_{2j}(\sqrt{x})P_{2k}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = d_{2j}\delta_{2j2k}, \quad j,k = 0,1,\ldots$$

Nun ist aber

(L13.6) $$\tilde{P}_n(x) := P_{2n}(\sqrt{x}) \in \Pi_n,$$

---

* s. Anhang 1 zu diesen Aufgaben

d. h. die in (L13.6) definierten $\tilde P_n(x)$ sind die gesuchten orthogonalen Polynome, und die Nullstellen von $\tilde P_n$ sind daher die Quadrate der Nullstellen von P_{2n}. Wir bestimmen die Gewichte $\tilde w_j$. Seien x_j die positiven Knoten vom Legendre-Polynom P_{2n}, dann sind $\tilde x_j = x_j^2$, $j = 1, 2, \ldots, n$ die Knoten von $\tilde P_n$. Seien $\tilde\ell_k$ die Lagrangekoeffizienten bezüglich der Knoten $\tilde x_j$. Dann ist $\tilde w_j = \int_0^1 \frac{\tilde\ell_j(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, nach Formel (4.4), S. 85. Nun ist (man ersetze x durch x^2) $\int_0^1 \frac{\tilde\ell_j(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \tilde\ell_j(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \tilde\ell_j(x^2)\,\mathrm{d}x$ und $\tilde\ell_j(x^2) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n \frac{(x-x_k)(x+x_k)}{(x_j-x_k)(x_j+x_k)} \in \Pi_{2n-2}$. Wir können das Integral also exakt mit der zu P_{2n} gehörenden Gauß-Legendre-Formel auswerten. Die Gewichte dieser Formel seien w_j. Wir erhalten $\tilde w_j = w_j + w_{-j} = 2w_j$, wobei w_{-j} das zum Knoten $-x_j$ gehörende Gewicht ist, das wegen der Symmetrie mit w_j übereinstimmt. Um die Dreitermrekursion zu finden, schreiben wir die Formel (13.1) dreimal hin:

$$\begin{aligned}
2nP_{2n} &= (4n-1)xP_{2n-1} - (2n-1)P_{2n-2} &&\Rightarrow (4n-1)xP_{2n-1} = 2nP_{2n} + (2n-1)P_{2n-2},\\
(2n+1)P_{2n+1} &= (4n+1)xP_{2n} - 2nP_{2n-1} &&\Rightarrow \qquad 2nP_{2n-1} = (4n+1)xP_{2n} - (2n+1)P_{2n+1},\\
(2n+2)P_{2n+2} &= (4n+3)xP_{2n+1} - (2n+1)P_{2n} &&\Rightarrow (4n+3)xP_{2n+1} = (2n+2)P_{2n+2} + (2n+1)P_{2n}.
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die mittlere Gleichung mit x und können dann die Terme mit ungeraden Indizes eliminieren. Das ergibt

$$\begin{aligned}
2nP_{2n} + (2n-1)P_{2n-2} &= (4n-1)\frac{(4n+1)x^2P_{2n} - (2n+1)xP_{2n+1}}{2n}\\
&= (4n-1)\frac{(4n+1)x^2P_{2n} - (2n+1)\dfrac{(2n+2)P_{2n+2} + (2n+1)P_{2n}}{4n+3}}{2n}.
\end{aligned}$$

Sortieren und anwenden von (L13.6) ergibt

(L13.7a) $$c_{n+1}\tilde P_{n+1} = (x - a_n)\tilde P_n - b_{n-1}\tilde P_{n-1},\ n = 0, 1, \ldots,\ \tilde P_{-1} = 0,\ \tilde P_0 = 1 \quad \text{mit}$$

(L13.7b) $$c_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(4n+1)(4n+3)}, \quad a_n = \frac{32n^3 + 24n^2 - 1}{(4n-1)(4n+1)(4n+3)}, \quad b_{n-1} = \frac{(2n-1)2n}{(4n-1)(4n+1)}.$$

Anhang 1: Symmetrie von orthogonalen Polynomen

Wir betrachten das Skalarprodukt

(L13.8) $$< p, q > := \int_{-a}^{a} w(x)p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad w(-x) = w(x), \quad a > 0,$$

wobei auch der Fall $a = \infty$ zugelassen ist. Wir wollen zeigen, daß die vorausgesetzte Symmetrie des Gewichtes w auch Symmetrien der entsprechenden orthogonalen Polynome nach sich zieht. Das einfachste Gewicht mit der angegebenen Eigenschaft ist $w = 1$ bei $a = 1$ (Legendre-Polynome), ein anderes häufig vorkommendes Gewicht ist $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ebenfalls für $a = 1$ (Tschebyscheff-Polynome). Seien p_j, $j = 0, 1, \ldots$ orthogonale Polynome in bezug auf das gegebene Skalarprodukt $<\ ,\ >$, dann gilt (mit $d_n > 0$)

(L13.9) $$< p_m, p_n > := \int_{-a}^{a} w(x)p_m(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x = d_n\delta_{mn} = \int_{-a}^{a} w(x)p_m(-x)p_n(-x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei beim letzten Integral x durch $-x$ ersetzt und $w(-x) = w(x)$ benutzt wurde. Aus (L13.9) folgt also, daß auch $\tilde p_n(x) := p_n(-x)$ orthogonale Polynome sind mit $< \tilde p_n, \tilde p_n > = < p_n, p_n >$. Da sich orthogonale Polynome (zum selben Skalarprodukt) nur um einen Faktor unterscheiden, ist notwendig $\tilde p_n = \pm p_n$. Für den nichtverschwindenden Höchstkoeffizient h_n von p_n gilt also $(-1)^n h_n = \pm h_n$, also $\tilde{p}_n = (-1)^n p_n$, d. h. p_{2n} ist eine gerade, und p_{2n+1} eine ungerade Funktion. Diese Funktionen haben also die Form

$$p_{2n} = b_0 + b_2 x^2 + \cdots + b_{2n} x^{2n}, \tag{L13.10g}$$

$$p_{2n+1} = b_1 x + b_3 x^3 + \cdots + b_{2n+1} x^{2n+1}. \tag{L13.10u}$$

Mit $p_n(u) = 0$ ist dann auch $p_n(-u) = 0$, die Nullstellen sind also symmetrisch um den Nullpunkt verteilt, und die Gewichte, die zu den Knoten u und $-u$ gehören, stimmen überein. Weiter folgt $< xp_n, p_n >= 0$, da $w(x)xp_n(x)p_n(x)$ eine ungerade Funktion ist, und Integrale über ungerade Funktionen verschwinden. Für Gewichte w mit $w(x) = w(-x)$ gilt also immer

$$a_n = 0 \tag{L13.11}$$

für den in der Dreitermrekursion (4.38) (Buch, 2. Aufl., S. 101) vorkommenden Koeffizienten a_n.

Anhang 2: Die Berechnung der Knoten und Gewichte nach Golub-Welsch

Wir benutzen das Beispiel aus Aufgabe 26 um zu zeigen, wie die zur Gauß-Integration benötigten Knoten und Gewichte allein aus den Koeffizienten c_{n+1}, a_n, b_{n-1} der Dreitermrekursion berechnet werden können. Wir gehen dabei von der Dreitermrekursion

$$c_{n+1}p_{n+1} = (x - a_n)p_n - b_{n-1}p_{n-1},\ n = 0, 1, \ldots,\ p_{-1} = 0,\ p_0 = 1 \tag{L13.11}$$

aus und bemerken, daß im Satz 4.25 (Buch, 2. Aufl., S. 103) vorausgestzt wird, daß die dort benutzten orthogonalen Polynome alle den Höchstkoeffizienten Eins haben. Diese Voraussetzung wird jedoch von den in (L13.11) definierten orthogonalen Poynomen p_j i. a. nicht erfüllt. Seien h_n die Höchstkoeffizienten von p_n. Wir setzen $\tilde{p}_n := p_n/h_n$. Dann folgt aus (L13.11) $c_{n+1}h_{n+1}\tilde{p}_{n+1} = (x - a_n)h_n\tilde{p}_n - b_{n-1}h_{n-1}\tilde{p}_{n-1}$. Dividieren wir diese Gleichung durch h_n, so ergibt sich $c_{n+1}h_{n+1}/h_n\tilde{p}_{n+1} = (x - a_n)\tilde{p}_n - b_{n-1}h_{n-1}/h_n\tilde{p}_{n-1}$. Nun ist aber nach (4.38) , Buch, 2. Aufl., S. 101 $c_{n+1} = h_n/h_{n+1}$, also

$$\tilde{p}_{n+1} = (x - a_n)\tilde{p}_n - b_{n-1}c_n\tilde{p}_{n-1},\ n = 0, 1, \ldots,\ \tilde{p}_{-1} = 0,\ \tilde{p}_0 = 1, \tag{L13.11$'$}$$

und nach (4.38) ist $b_{n-1}c_n > 0$. Im Fall der Dreitermrekursion (L13.11) lautet die in (4.40) angegebene Matrix entsprechend

$$\mathbf{A}_{n+1} := \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_0c_1} & & \cdots & 0 \\ \sqrt{b_0c_1} & a_1 & \sqrt{b_1c_2} & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \cdots & \sqrt{b_{n-1}c_n} \\ 0 & \cdots & & \sqrt{b_{n-1}c_n} & a_n \end{pmatrix}.$$

Speziell im Fall von Aufgabe 26, also für die Dreitermrekursion (L13.7) ist

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0.3333 & 0.2981 & 0 & 0 \\ 0.2981 & 0.5238 & 0.2556 & 0 \\ 0 & 0.2556 & 0.5065 & 0.2521 \\ 0 & 0 & 0.2521 & 0.5030 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $\mathbf{A}_4$ und damit die gesuchten Integrationsknoten sind $0.0336, 0.2762, 0.6346, 0.9222$. Das benutzte matlab-Programm berechnet auch Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ mit der eulidischen Länge Eins. Um die Gewichte zu bestimmen, müssen wir diese Eigenvektoren so normieren, daß $||\mathbf{v}_i||_2^2 =< p_0, p_0 >= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2$. Wir müssen also die ausgerechneten Eigenvektoren mit $\sqrt{2}$ multiplizieren. Die so multiplizierten Eigenvektoren sind (spaltenweise)

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.8516 & -0.7922 & -0.6669 & 0.4499 \\ -0.8561 & 0.1517 & -0.6740 & 0.8887 \\ 0.6484 & 0.7769 & 0.4856 & 0.8603 \\ -0.3483 & -0.8636 & 0.9301 & 0.5174 \end{pmatrix}.$$

Die Quadrate der ersten Komponenten sind dann $0.7253, 0.6276, 0.4447, 0.2024$, die gesuchten Gewichte. Das mit vielen Kommentaren und Ergebnissen gespickte matlab-Programm sieht so aus:

```
%Aufgabe 26, Numerik, SS1998, 13. April 1998
%Es soll geprft werden, ob die hergeleitete Dreitermrekursion (L13.7) stimmt.
l=6;
alt=zeros(1,l);  %p_n-1
neu=alt;         %p_n+1
mittel=alt;      %p_n
mittel(l)=1;     %p_0=1
%Die drei Vektoren neu, mittel, alt sollen die Koeffizienten der
%Dreitermrekursion enthalten, jeweils zuerst der Hchstkoeffizient,
%zuletzt der konstante Koeffizient (matlab-Technik).
linear=alt;  %enthlt den linearen Faktor x-a_n
linear(l-1)=1;
c=0; %wird nicht gebraucht, nur formal als Deklaration

for n=0:4  %Polynomgrad=n+1
  a=(32*n^3+24*n^2-1)/((4*n-1)*(4*n+1)*(4*n+3));
  b=((2*n-1)*2*n)/((4*n-1)*(4*n+1));
  [n a sqrt(b*c)] %Das sind die Eintrge fr die Golub-Welsch-Matrix
  c=(2*n+1)*(2*n+2)/((4*n+1)*(4*n+3));
  linear(l)=-a;
  h=conv(mittel,linear); %Produkt (x-a_n)*P_n
  h=h(l:2*l-1); %nur die letzten l Komponenten
  neu=h-b*alt;  %Dreitermrekursion
  neu=neu/c;    %      "
  alt=mittel;
  mittel=neu;
end; %for

p=[50.2734  -93.8438   54.1406   -9.8438    0.2734];
r=roots(p);
%=
%    0.9222
%    0.6346
%    0.2762
%    0.0336
r5=sqrt(r);
%=   0.9603
%    0.7966
%    0.5256
%    0.1834 (positive Legendre Knoten von P_8, A.-St., S. 916)
%Zwischenergebnisse von oben:
% Grad     a         b         c
%   1    0.3333         0    0.6667
%   2    0.5238    0.1333    0.3429
%   3    0.5065    0.1905    0.3030
%   4    0.5030    0.2098    0.2872

%Wir berechnen die Gewichte und Knoten nach Golub-Welsch.
%Um aus der Rekursionsformel c_{n+1}p_{n+1}=(x-a_n)p_n-b_{n-1}p_{n-1}
%eine Rekursionsformel fr Hchstkoeffizienten Eins zu gewinnen,
%gehe man ber zu p_{n+1}=(x-a_n)p_n-b_{n-1}c_np_{n-1}.
A=[0.3333 0.2981 0      0;
   0.2981 0.5238 0.2556 0;
   0      0.2556 0.5065 0.2521;
   0      0      0.2521 0.5030];
%Eigenwerte sind obige Knoten (aber aufsteigend geordnet)
[V,L]=eig(A); %V Eigenvektoren, L Diagonalmatrix mit Eigenwerten in Diagonale
%V =
%    0.6022   -0.5602   -0.4716    0.3181
%   -0.6054    0.1073   -0.4766    0.6284
%    0.4585    0.5494    0.3433    0.6083
%   -0.2463   -0.6107    0.6577    0.3659
%Eigenvektoren V, alle Spalten normiert mit Lnge Eins.
V=sqrt(2)*V; %richtige Normierung.
%Die gesuchten Gewichte sind dann
W=V(1,1:4).*V(1,1:4); %die Quadrate der ersten Eigenvektorkomponenten
%=0.7253    0.6276    0.4447    0.2024
%=das doppelte der Gewichte fr Legendre Polynome P_8.
return

%Ergebnisse: Koeffizienten der orthogonalen Polynome bis Grad 4
%                  x^4       x^3       x^2       x^1       x^0
%-----------------------------------------------------------------
%grad =  0 neu =                                               1
%grad =  1 neu =                                  1.5000   -0.5000
%grad =  2 neu =                        4.3750   -3.7500    0.3750
%grad =  3 neu =           14.4375  -19.6875    6.5625   -0.3125
%grad =  4 neu =  50.2734  -93.8438   54.1406   -9.8438    0.2734

%stimmen, mit A.-St., Table 22.9 verglichen.
```