Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 12: Übungen am 7. April 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P34. (a) Ist I_n eine Folge von Quadraturformelm vom Typ $I_n(f) = \sum_{j=0}^n w_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$ zur numerischen Integration von $I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, so heißt Konvergenz $I_n(f) \to I(f)$ für jedes $f \in \mathrm{C}[a,b]$. (b) Liegt Konvergenz bereits für alle Polynome vor, und sind alle $w_j^{(n)} \geq 0$, so liegt Konvergenz vor. (c) Die Fehler zusammengesetzter Formeln sind vom Typ ch^k, $k \geq 1$, also konvergent. (d) Satz von Weierstraß.

Aufgabe P35. (a) Bei fester Knotenanzahl $n+1$ eine Knotenwahl, bei der die Ordnung möglichst groß wird. (b) Ja, denn es werden Polynome von der Ordnung $n+1$ (Grad n) auf jeden Fall exakt integriert.

Aufgabe P36. Es ist zu beachten, daß orthogonale Polynome nur bis auf einen nichtverschwindenden Faktor bestimmt sind. Die Bedingungsgleichungen lauten:

(a) $$\langle p_1, 1\rangle := \int_0^1 (a+bx)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow a + 2b = 0,$$

(b) $$\langle p_2, 1\rangle := \int_0^1 (a+bx+cx^2)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow 6a + 3b + 2c = 0,$$

$$\langle p_2, x\rangle := \int_0^1 (a+bx+cx^2)x\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow 6a + 4b + 3c = 0 \Rightarrow b = -6a,\ c = 6a.$$

Aufgabe 23. Wir setzen $x_0 := a, x_1 := a + (b-a)/4, x_2 := a + (b-a)/2, x_3 := a + 3(b-a)/4, x_4 := b$.
(a) Die Formel (12.3) lautet dann für $L := 1$:

$$\tilde{I}_2^M(f) := \frac{4I_2^M(f) - I_1^M(f)}{3} = \frac{4\frac{(b-a)}{2}(f(x_1) + f(x_3)) - (b-a)(f(x_2))}{3} = \frac{b-a}{3}(2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)),$$

und ein Gewicht ist negativ. (b) (c) Die durch Extrapolation gewonnenen Formeln haben mindestens die Ordnung der Ausgangsformel, unabhängig davon ob die Exponenten k_j in der Formel (12.2) richtig sind. Also hat $\tilde{I}_2^M(f)$ mindestens die Ordnung Zwei. Wir integrieren $f_j(x) = (x - x_2)^j$, für $j = 2,3$. Es ist $I(f_2) = (b-a)^3/12$, $I(f_3) = 0$ und $\tilde{I}_2^M(f_2) = (b-a)/3 \cdot (2(x_1-x_2)^2 + 2(x_3-x_2)^2) = (b-a)^3/12$, $\tilde{I}_2^M(f_3) = 0$. Also hat die Formel $\tilde{I}_2^M(f)$ die Ordnung Vier. Damit ist sie auch interpolatorisch, denn für drei Knoten muß sie nur eine Ordnung ≥ 3 haben. (d) Da die Ordnung Vier ist, kann der Fehler für $f \in \mathrm{C}^4[a,b]$ in der folgenden Form nach oben abgeschätzt werden:

$$\text{(L12.1)} \qquad \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(4)}(x)|}{24} \int_a^b |(x-x_1)(x-x_2)^2(x-x_3)|\,\mathrm{d}x = \frac{7(b-a)^5}{23040} \max_{x\in[a,b]} |f(x)^4|.$$

(e) Die Formelm $I_{0,j}$ enthalten $s_j := 1 + 2 + \cdots + 2^j = 2^{j+1} - 1$ Knoten und haben unter der Annahme (12.2) die Ordnung $\mathcal{O}_j := 2(j+1)$, $j = 0, 1, \ldots$ Damit die Formeln interpolatorisch sind, muß $\mathcal{O}_j \geq s_j$ gelten. Das ist nur für $j = 0, 1$ richtig.

Aufgabe 24. (c) Es ist (log 2 nur für Freaks)

$$I(f_1) = \log 2 = 0.69314\,71805\,59945\,30941\,72321\,21458, \quad I(f_2) = 2/3, \quad I(f_3) = 2.$$

Das folgende Pascal-Programm enthält neben den Aufgaben weitere vier Fälle zum Testen: $x^5, 1/x^{0.9}, 1/\sin(x^{0.9}), 1/\sin(x^{0.9}) - 1/x^{0.9}$. Im letzten Beispiel wird der Effekt des *Abziehens der Singularität* untersucht.

Programm L12.1. Pascal-Programm zur Extrapolation bei Quadraturformeln

```
program extrapolation;
{Numerische Mathematik, WS 1997/1998, Aufgabe 24, Bogen 12}
{Integration durch Extrapolation mit Schaetzung der Konvergenzordnung}
{speziell Romberg Integration. Das Programm hat nicht das Ziel, die Zahl der}
{Operationen oder Speicherplaetze zu minimieren. Klappt: 5. 2. 1998}
{Es geht im wesentlichen darum, den Effekt der Extrapolation zu studieren,}
{angewendet auf singulre Integrale, Prototyp 1/sqrt x. Es wird die}
{Mittelpunktsformel (= Einpunkt-Gauformel) und die Zweipunkt-Gauformel}
{verwendet, Formel (4.48) im Buch, 2. Aufl. S. 107.}
{Das Abziehen der Singularitt bringt fr die Ausgangsformel Gewinn, aber nicht}
{fr die anschlieende Extrapolation. Es werden die folgenden Flle behandelt:}
    {0:f:=x*sqr(sqr(x));}  {f(x)=x^5: zum Testen}
    {1:f:=1/(1+x);}
    {2:f:=sqrt(x);}
    {3:f:=1/sqrt(x);}
    {4:f:=exp(-0.9*ln(x));}                      {1/x^0.9}
    {5:f:=1/sin(exp(0.9*ln(x)));}                {1/sin(x^0.9)}
    {6:f:=1/sin(exp(0.9*ln(x)))-exp(-0.9*ln(x));} {1/sin(x^0.9)-1/x^0.9}
    {Fall 6 ist mit Abziehen der Singularitt}
{Nur die Flle 1 - 3 sind als Aufgabe vorgesehen.}

const N=20;
type vektor=array[0..N] of real;
var j,fall,m,n,Nr:integer;
    s,tatsFehler:real;
    I:vektor;exakt: array[0..6] of real;
    Fall:array[0..6] of string;
    Mittelpunkt:boolean;

procedure extrapolation(var n:integer;alpha:real;var I:vektor);
{Auf die Komponenten I[0],I[1],...,I[n] wird eine Extrapolation}
{mit dem Faktor 2^alpha angewendent: }
{        II(j)=(2^alpha*I(j)-I(j-1)/(2^alpha - 1)}
{Die Ergebnisse II werden wieder auf I[0],I[1],...,I[n-1] }
{gespeichert. n wird um eins verkleinert}
var j:integer;
    faktor:real;
begin
  faktor:=exp(alpha*ln(2));
  for j:=0 to n-1 do
    I[j]:=(faktor*I[j+1]-I[j])/(faktor - 1);
  n:=n-1;
end; {extrapolation}

function f(Fall:integer;x:real):real;
begin
  case Fall of
    0:f:=x*sqr(sqr(x));  {x^5 zum Testen}
    1:f:=1/(1+x);
    2:f:=sqrt(x);
    3:f:=1/sqrt(x);
    4:f:=exp(-0.9*ln(x));                      {1/x^0.9}
    5:f:=1/sin(exp(0.9*ln(x)));                {1/sin(x^0.9)}
    6:f:=1/sin(exp(0.9*ln(x)))-exp(-0.9*ln(x)); {1/sin(x^0.9)-1/x^0.9}
    {Fall 6 ist mit Abziehen der Singularitt}
  end; {case of}
end; {f}

function Mittelpunktsregel(Fall,m:integer;a,b:real):real;
var S,h:real;j:integer;
{Die aus m aequidistanten Intervallen zusammengesetzte}
{Mittelpunktsformel wird berechnet}
begin
  S:=0;
  h:=(b-a)/m;
  for j:=0 to m-1 do
    S:=S+f(Fall,a+h*(j+0.5));
  Mittelpunktsregel:=h*S;
end; {Mittelpunktsregel}

function Zweipunktgaussformel(Fall,m:integer;a,b:real):real;
var S,b0,h,M:real;j:integer;
{Die aus m aequidistanten Intervallen zusammengesetzte}
{Zweipunktgaussformel wird berechnet}
```

```
begin
  S:=0;
  h:=(b-a)/m;
  for j:=0 to m-1 do
  begin
    M:=a+h*(j+0.5);
    b0:=sqrt(3)*h/6;
    S:=S+f(Fall,M-b0)+f(Fall,M+b0);
  end; {for j}
  Zweipunktgaussformel:=0.5*h*S;
end; {Zweipunktgaussformel}

function integration(Fall,m:integer;a,b:real;auswahl:boolean):real;
begin
  if auswahl then
  integration:=Mittelpunktsregel(Fall,m,a,b) else
  integration:=Zweipunktgaussformel(Fall,m,a,b);
end; {integration}

procedure exponent_schaetzen(n:integer; I:vektor;var schaetzer:real);
{I[0],I[1],...,I[n] enthalte numerische Werte fuer eine theoretische Zahl}
{i bei jeweils halbierter Maschenweite. Es wird die experimentelle}
{Fehlerordnung nach der Formel (j=0,1,...,n-2)}
{          alpha[j]=ln((I[j+1]-I[j])/(I[j+2]-I[j+1]))/ln(2);  }
{berechnet}
var j:integer;
begin
  for j:=0 to n-2 do
  begin
    I[j]:=ln(abs((I[j+1]-I[j])/(I[j+2]-I[j+1])))/ln(2);
    writeln(j:3,' ',I[j]:6:4);
  end;
  schaetzer:=round(10*I[n-2])/10; {das ergibt einen zweistelligen Schaetzer}
  {schaetzer:=round(I[n-2]);} {das ergibt einen  einstelligen Schaetzer}
  {if fall>=4 then}
  {schaetzer:=round(100*I[n-2])/100;} {das ergibt einen dreistelligen Schaetzer}
  {Die Ergebnisse haengen sehr davon ab, wie gut der Schaetzer getroffen wird.}
end; {exponent_schaetzen}

begin {Hauptprogramm}
  exakt[0]:=1/6;exakt[1]:=ln(2);exakt[2]:=2/3;exakt[3]:=2;
  exakt[4]:=10;exakt[5]:=10.093378656223964;exakt[6]:=0.093378656223964;
  Mittelpunkt:=true;  {bei true Mittelpunksformel, sonst 2Pkt-Gauformel}
  if Mittelpunkt then
  begin
    Fall[0]:='Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf x^5';
    Fall[1]:='Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/(x+1)';
    Fall[2]:='Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf sqrt x';
    Fall[3]:='Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/sqrt x';
    Fall[4]:='Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/(x^0.9)';
    Fall[5]:='Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/sin(x^0.9)';
    Fall[6]:='Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/sin(x^0.9)-1/x^0.9';
  end else
  begin
    Fall[0]:='Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf x^5';
    Fall[1]:='Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/(x+1)';
    Fall[2]:='Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf sqrt x';
    Fall[3]:='Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/sqrt x';
    Fall[4]:='Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/(x^0.9)';
    Fall[5]:='Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/sin(x^0.9)';
    Fall[6]:='Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/sin(x^0.9)-1/x^0.9';
  end;
  for fall:=6 to 6 do
  begin
  n:=8; if fall>=4 then n:=16;
  Nr:=0;
  writeln;
  writeln(Fall[fall]);
  m:=1;
  for j:=0 to n do
  begin
    I[j]:=integration(fall,m,0,1,Mittelpunkt);
    writeln(j:3,' ',I[j]:16:14);
    m:=2*m;
  end; {for j}
  writeln('    ',exakt[fall]:16:14,' exakt, tats. Fehler ',exakt[fall]-I[n]);
  writeln;
  repeat
    Nr:=Nr+1;
    exponent_schaetzen(n,I,s);
```

```
    writeln('    ',s:6:4,' berechneter Schtzer');
    writeln;
    writeln('Extrapolation Nr. ',Nr:2);
    if (Nr>=2) and (fall>=2) then
    begin
      if Mittelpunkt then
        s:=2*(Nr-1) else
        s:=2*Nr;
      writeln('verwendeter Schtzer = ',s:6:4);
    end;
    extrapolation(n,s,I); {n wird um Eins verkleinert}
    tatsFehler:=abs(exakt[fall]-I[n]);
    for j:=0 to n do
    begin
      if j<n then
      writeln(j:3,' ',I[j]:17:15) else
      writeln(j:3,' ',I[j]:17:15,' tats. Fehler ',tatsFehler);
    end;
    writeln;
  until (tatsFehler<1.0e-12) or (Nr=5);
  end;{for Fall}
end. {Hauptprogramm}

{Ergebnisse: bei Abbruchkriterium tatsFehler<1.0e-12 bei max 5 Extrapolationen
Bei Abbruchkriterium tatsFehler<1.0e-8 kommt man mit max 2 Extrapolationen aus,
bei der Zweipunktgauformel sogar mit einer Extrapolation.

Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/(x+1)***************************

  0 0.66666667
  1 0.68571429
  2 0.69121989
  3 0.69266055
  4 0.69302521
  5 0.69311667
  6 0.69313955
  7 0.69314527
  8 0.69314670
    0.693147180560 exakt, tats. Fehler  4.76835566143308e-07

  0 1.7906
  1 1.9342
  2 1.9821
  3 1.9954
  4 1.9988
  5 1.9997
  6 1.9999
    2.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 0.69206349206349
  1 0.69305509305509
  2 0.69314077498431
  3 0.69314676776023
  4 0.69314715455309
  5 0.69314717893123
  6 0.69314718045810
  7 0.69314718055358 tats. Fehler  6.36546371168834e-12

  0 3.5327
  1 3.8377
  2 3.9536
  3 3.9879
  4 3.9969
  5 3.9992
    4.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  2
  0 0.69312119978787
  1 0.69314648711292
  2 0.69314716727862
  3 0.69314718033928
  4 0.69314718055644
  5 0.69314718055989
  6 0.69314718055995 tats. Fehler  1.11022302462516e-16

Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf sqrt x****************************

  0 0.70710678
  1 0.68301270
```

```
  2 0.67297740
  3 0.66903217
  4 0.66753668
  5 0.66698269
  6 0.66678050
  7 0.66670744
  8 0.66668121
    0.666666666667 exakt, tats. Fehler -1.45474567094794e-05

  0 1.2636
  1 1.3469
  2 1.3995
  3 1.4327
  4 1.4542
  5 1.4685
  6 1.4781
    1.5000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 0.66983521236133
  1 0.66748890651604
  2 0.66687445699727
  3 0.66671876151328
  4 0.66667969972236
  5 0.66666992551686
  6 0.66666748141589
  7 0.66666687035627 tats. Fehler  2.03689599742596e-07

  0 1.9330
  1 1.9806
  2 1.9949
  3 1.9987
  4 1.9997
  5 1.9999
    2.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  2
verwendeter Schtzer = 2.0000
  0 0.66670680456760
  1 0.66666964049102
  2 0.66666686301861
  3 0.66666667912539
  4 0.66666666744837
  5 0.66666666671557
  6 0.66666666666972 tats. Fehler  3.05699909830537e-12

  0 3.7421
  1 3.9168
  2 3.9771
  3 3.9941
  4 3.9985
    4.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  3
verwendeter Schtzer = 4.0000
  0 0.66666716288591
  1 0.66666667785379
  2 0.66666666686584
  3 0.66666666666990
  4 0.66666666666672
  5 0.66666666666667 tats. Fehler  4.44089209850063e-16

Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/sqrt x***************************

  0 1.41421356
  1 1.57735027
  2 1.69884408
  3 1.78646100
  4 1.84885668
  5 1.89308836
  6 1.92439276
  7 1.94653528
  8 1.96219415
    2.000000000000 exakt, tats. Fehler  3.78058473229441e-02

  0 0.4252
  1 0.4716
  2 0.4898
  3 0.4964
  4 0.4987
```

```
  5 0.4995
  6 0.4998
    0.5000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 1.97119711930698
  1 1.99215608436771
  2 1.99798696349524
  3 1.99949318854227
  4 1.99987306953876
  5 1.99996825306802
  6 1.99999206237076
  7 1.99999801553665 tats. Fehler  1.98446335231139e-06

  0 1.8458
  1 1.9528
  2 1.9873
  3 1.9968
  4 1.9992
  5 1.9998
    2.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  2
verwendeter Schtzer = 2.0000
  0 1.99914240605462
  1 1.99993058987108
  2 1.99999526355795
  3 1.99999969653759
  4 1.99999998091111
  5 1.99999999880501
  6 1.99999999992528 tats. Fehler  7.47235606723962e-11

  0 3.6073
  1 3.8668
  2 3.9624
  3 3.9902
  4 3.9976
    4.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  3
verwendeter Schtzer = 4.0000
  0 1.99998313545884
  1 1.99999957513707
  2 1.99999999206957
  3 1.99999999986935
  4 1.99999999999793
  5 1.99999999999996 tats. Fehler  3.90798504668055e-14

Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/(x^0.9)*************************

  0 1.86606598
  1 2.38886223
  2 2.89244656
  3 3.36683714
  4 3.81064127
  5 4.22502414
  6 4.61173199
  7 4.97256192
  8 5.30923285
  9 5.62335910
 10 5.91644955
 11 6.18991268
 12 6.44506283
 13 6.68312633
 14 6.90524744
 15 7.11249376
 16 7.30586142
    10.000000000000 exakt, tats. Fehler  2.69413858406468e+00

  0 0.0540
  1 0.0862
  2 0.0962
  3 0.0990
  4 0.0997
  5 0.0999
  6 0.1000
  7 0.1000
  8 0.1000
  9 0.1000
 10 0.1000
```

```
 11 0.1000
 12 0.1000
 13 0.1000
 14 0.1000
    0.1000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 9.67283921004297
  1 9.90874907150133
  2 9.97639129188106
  3 9.99404267464898
  4 9.99850711901311
  5 9.99962655619383
  6 9.99990662504897
  7 9.99997665538672
  8 9.99999416379212
  9 9.99999854094452
 10 9.99999963523567
 11 9.99999990880901
 12 9.99999997720256
 13 9.99999999430085
 14 9.99999999857543
 15 9.99999999964322 tats. Fehler  3.56775942123022e-10

  0 1.8022
  1 1.9381
  2 1.9832
  3 1.9957
  4 1.9989
  5 1.9997
  6 1.9999
  7 2.0000
  8 2.0000
  9 2.0000
 10 2.0000
 11 2.0000
 12 2.0000
 13 2.0012
    2.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  2
verwendeter Schtzer = 2.0000
  0 9.98738569198744
  1 9.99893869867431
  2 9.99992646890496
  3 9.99999526713449
  4 9.99999970192074
  5 9.99999998133402
  6 9.99999999883263
  7 9.99999999992725
  8 9.99999999999533
  9 9.99999999999938
 10 10.00000000000012
 11 10.00000000000041
 12 10.00000000000028
 13 10.00000000000029
 14 9.99999999999915 tats. Fehler  8.45545855554519e-13

Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/sin(x^0.9)**********************

  0 1.95846616
  1 2.48212026
  2 2.98583190
  3 3.46022753
  4 3.90402557
  5 4.31840493
  6 4.70511137
  7 5.06594081
  8 5.40261158
  9 5.71673778
 10 6.00982821
 11 6.28329134
 12 6.53844148
 13 6.77650499
 14 6.99862610
 15 7.20587242
 16 7.39924007
    10.093378656224 exakt, tats. Fehler  2.69413858406131e+00

  0 0.0560
```

```
  1 0.0865
  2 0.0962
  3 0.0990
  4 0.0997
  5 0.0999
  6 0.1000
  7 0.1000
  8 0.1000
  9 0.1000
 10 0.1000
 11 0.1000
 12 0.1000
 13 0.1000
 14 0.1000
    0.1000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 9.77804952358208
  1 10.00390826221534
  2 10.06985195059448
  3 10.08734200932951
  4 10.09183910348200
  5 10.09298635193635
  6 10.09327863934034
  7 10.09335313490711
  8 10.09337213752824
  9 10.09337698948726
 10 10.09337822960984
 11 10.09337854691016
 12 10.09337862818253
 13 10.09337864902157
 14 10.09337865437340
 15 10.09337865574663 tats. Fehler  4.77372807949905e-10

  0 1.7761
  1 1.9147
  2 1.9595
  3 1.9708
  4 1.9727
  5 1.9722
  6 1.9710
  7 1.9696
  8 1.9681
  9 1.9666
 10 1.9650
 11 1.9635
 12 1.9612
 13 1.9625
    2.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  2
verwendeter Schtzer = 2.0000
  0 10.07919450842643
  1 10.09183318005419
  2 10.09317202890786
  3 10.09333813486616
  4 10.09336876808780
  5 10.09337606847500
  6 10.09337796676270
  7 10.09337847173529
  8 10.09337860680693
  9 10.09337864298403
 10 10.09337865267693
 11 10.09337865527333
 12 10.09337865596792
 13 10.09337865615735
 14 10.09337865620437 tats. Fehler  1.96305194322122e-11

  0 3.2388
  1 3.0108
  2 2.4389
  3 2.0691
  4 1.9433
  5 1.9104
  6 1.9025
  7 1.9006
  8 1.9001
  9 1.9004
 10 1.9023
 11 1.8745
```

```
 12 2.0102
    2.0000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  3
verwendeter Schtzer = 4.0000
  0 10.09267575816271
  1 10.09326128549811
  2 10.09334920859671
  3 10.09337081030258
  4 10.09337655516748
  5 10.09337809331521
  6 10.09337850540013
  7 10.09337861581170
  8 10.09337864539584
  9 10.09337865332313
 10 10.09337865544642
 11 10.09337865601422
 12 10.09337865616997
 13 10.09337865620751 tats. Fehler  1.64952496106707e-11

  0 2.7354
  1 2.0251
  2 1.9108
  3 1.9011
  4 1.9002
  5 1.9001
  6 1.9000
  7 1.8999
  8 1.9005
  9 1.9028
 10 1.8662
 11 2.0531
    2.1000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  4
verwendeter Schtzer = 6.0000
  0 10.09327057958279
  1 10.09335060420145
  2 10.09337115318680
  3 10.09337664635582
  4 10.09337811773025
  5 10.09337851194116
  6 10.09337861756427
  7 10.09337864586543
  8 10.09337865344896
  9 10.09337865548012
 10 10.09337865602324
 11 10.09337865617245
 12 10.09337865620810 tats. Fehler  1.59001700694716e-11

  0 1.9614
  1 1.9034
  2 1.9005
  3 1.9001
  4 1.9000
  5 1.9000
  6 1.8999
  7 1.9006
  8 1.9030
  9 1.8639
 10 2.0652
    2.1000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  5
verwendeter Schtzer = 8.0000
  0 10.09335091802348
  1 10.09337123377105
  2 10.09337666789766
  3 10.09337812350035
  4 10.09337851348708
  5 10.09337861797848
  6 10.09337864597641
  7 10.09337865347870
  8 10.09337865548809
  9 10.09337865602537
 10 10.09337865617303
 11 10.09337865620824 tats. Fehler  1.57598378791590e-11

Mittelpunktsregel in [0,1] angewendet auf 1/sin(x^0.9)-1/x^0.9**************
  0 0.09240017498290
```

```
  1 0.09325803164001
  2 0.09338534657581
  3 0.09339039000437
  4 0.09338429230172
  5 0.09338078940264
  6 0.09337938352002
  7 0.09337889002483
  8 0.09337872860055
  9 0.09337867804955
 10 0.09337866268017
 11 0.09337865810591
 12 0.09337865676623
 13 0.09337865637876
 14 0.09337865626782
 15 0.09337865623631
 16 0.09337865622742
    0.09337865622396 exakt, tats. Fehler -3.45666550938262e-12

  0 2.7523
  1 4.6579
  2 -0.2739
  3 0.7997
  4 1.3171
  5 1.5104
  6 1.6122
  7 1.6750
  8 1.7177
  9 1.7484
 10 1.7717
 11 1.7897
 12 1.8042
 13 1.8160
 14 1.8260
    1.8000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 0.093603634685053
  1 0.093436637696683
  2 0.093392421840632
  3 0.093381835732105
  4 0.093379378196492
  5 0.093378817134825
  6 0.093378691211375
  7 0.093378663567870
  8 0.093378657684160
  9 0.093378656488337
 10 0.093378656263083
 11 0.093378656226516
 12 0.093378656222665
 13 0.093378656223121
 14 0.093378656223614
 15 0.093378656223840 tats. Fehler  1.23748233882282e-13

Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/(x+1)*************************
  0 0.69230769
  1 0.69307664
  2 0.69314229
  3 0.69314687
  4 0.69314716
  5 0.69314718
  6 0.69314718
  7 0.69314718
  8 0.69314718
    0.693147180560 exakt, tats. Fehler  3.03423952630055e-13

  0 3.5499
  1 3.8436
  2 3.9553
  3 3.9883
  4 3.9971
  5 3.9992
  6 4.0001
    4.0000 Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 0.69312790134708
  1 0.69314666972008
  2 0.69314717080094
  3 0.69314718039792
  4 0.69314718055737
```

```
  5 0.69314718055990
  6 0.69314718055995
  7 0.69314718055994 tats. Fehler  4.44089209850063e-16

Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf sqrt x**************************
  0 0.67388734
  1 0.66923950
  2 0.66757777
  3 0.66698889
  4 0.66678059
  5 0.66670695
  6 0.66668091
  7 0.66667170
  8 0.66666845
    0.666666666667 exakt, tats. Fehler -1.78015019347555e-06

  0 1.4839
  1 1.4966
  2 1.4994
  3 1.4999
  4 1.5000
  5 1.5000
  6 1.5000
    1.5000 Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 0.66669751633074
  1 0.66666893860999
  2 0.66666681637881
  3 0.66666667616082
  4 0.66666666726228
  5 0.66666666670393
  6 0.66666666666900
  7 0.66666666666681 tats. Fehler  1.45883305435746e-13


Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/sqrt x************************

  0 1.65068012
  1 1.75279953
  2 1.82518731
  3 1.87638770
  4 1.91259284
  5 1.93819380
  6 1.95629642
  7 1.96909690
  8 1.97814821
    2.000000000000 exakt, tats. Fehler  2.18517918491246e-02

  0 0.4964
  1 0.4996
  2 0.5000
  3 0.5000
  4 0.5000
  5 0.5000
  6 0.5000
    0.5000 Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 1.99933757025145
  1 1.99994688255583
  2 1.99999638688107
  3 1.99999976871783
  4 1.99999998545493
  5 1.99999999908951
  6 1.99999999994307
  7 1.99999999999644 tats. Fehler  3.55560025866453e-12

  0 3.6216
  1 3.8717
  2 3.9638
  3 3.9906
  4 3.9976
  5 3.9994
    4.0000 Schtzer

Extrapolation Nr.  2
Verwendeter Schtzer = 4.0e+00
  0 1.99998750337612
  1 1.99999968716942
```

```
  2 1.99999999417361
  3 1.99999999990408
  4 1.99999999999848
  5 1.99999999999998
  6 2.00000000000000 tats. Fehler  2.66453525910038e-15

Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/(x^0.9)**********************

  0 2.64451829
  1 3.13643890
  2 3.59601663
  3 4.02486848
  4 4.42500492
  5 4.79834565
  6 5.14668488
  7 5.47169687
  8 5.77494379
  9 6.05788316
 10 6.32187493
 11 6.56818796
 12 6.79800615
 13 7.01243410
 14 7.21250245
 15 7.39917282
 16 7.57334244
    10.000000000000 exakt, tats. Fehler  2.42665756191043e+00

  0 0.0981
  1 0.0998
  2 0.1000
  3 0.1000
  4 0.1000
  5 0.1000
  6 0.1000
  7 0.1000
  8 0.1000
  9 0.1000
 10 0.1000
 11 0.1000
 12 0.1000
 13 0.1000
 14 0.1000
    0.1000 Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 9.99023405447880
  1 9.99918717515089
  2 9.99994389514702
  3 9.99999639265679
  4 9.99999977287055
  5 9.99999998577798
  6 9.99999999911075
  7 9.99999999994428
  8 9.99999999999651
  9 9.99999999999962
 10 9.99999999999970
 11 10.00000000000055
 12 10.00000000000011
 13 9.99999999999775
 14 10.00000000000098
 15 9.99999999999972 tats. Fehler  2.84217094304040e-13

Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/sin(x^0.9)********************

  0 2.73803811
  1 3.22985904
  2 3.68940658
  3 4.11825017
  4 4.51838439
  5 4.89172452
  6 5.24006359
  7 5.56507554
  8 5.86832245
  9 6.15126182
 10 6.41525359
 11 6.66156662
 12 6.89138481
 13 7.10581276
 14 7.30588111
 15 7.49255148
```

```
 16 7.66672109
    10.093378656224 exakt, tats. Fehler  2.42665756191031e+00

  0 0.0979
  1 0.0998
  2 0.1000
  3 0.1000
  4 0.1000
  5 0.1000
  6 0.1000
  7 0.1000
  8 0.1000
  9 0.1000
 10 0.1000
 11 0.1000
 12 0.1000
 13 0.1000
 14 0.1000
    0.1000 Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 10.08226542071607
  1 10.09215667203878
  2 10.09321039775944
  3 10.09334490546844
  4 10.09337035206376
  5 10.09337647822478
  6 10.09337807562364
  7 10.09337850084484
  8 10.09337861460296
  9 10.09337864507286
 10 10.09337865323640
 11 10.09337865542326
 12 10.09337865600929
 13 10.09337865616502
 14 10.09337865621062
 15 10.09337865621874 tats. Fehler  5.26334531514294e-12

  0 3.2307
  1 2.9697
  2 2.4021
  3 2.0544
  4 1.9393
  5 1.9094
  6 1.9022
  7 1.9005
  8 1.9001
  9 1.9003
 10 1.8998
 11 1.9120
 12 1.7719
 13 2.4899
    2.5000 Schtzer

Extrapolation Nr.  2
Verwendeter Schtzer = 4.0e+00
  0 10.09281608879363
  1 10.09328064614082
  2 10.09335387264904
  3 10.09337204850345
  4 10.09337688663551
  5 10.09337818211689
  6 10.09337852919292
  7 10.09337862218683
  8 10.09337864710419
  9 10.09337865378063
 10 10.09337865556905
 11 10.09337865604836
 12 10.09337865617540
 13 10.09337865621366
 14 10.09337865621928 tats. Fehler  4.72333283596527e-12

  0 2.6654
  1 2.0103
  2 1.9095
  3 1.9010
  4 1.9002
  5 1.9000
  6 1.9000
  7 1.9000
```

```
  8 1.9004
  9 1.8997
 10 1.9157
 11 1.7314
 12 2.7675
    2.8000 Schtzer

Extrapolation Nr.  3
Verwendeter Schtzer = 6.0e+00
  0 10.09328802006697
  1 10.09335503497457
  2 10.09337233700908
  3 10.09337696343126
  4 10.09337820268009
  5 10.09337853470207
  6 10.09337862366293
  7 10.09337864749970
  8 10.09337865388661
  9 10.09337865559744
 10 10.09337865605597
 11 10.09337865617742
 12 10.09337865621426
 13 10.09337865621937 tats. Fehler  4.63451499399525e-12

  0 1.9535
  1 1.9030
  2 1.9004
  3 1.9001
  4 1.9000
  5 1.9000
  6 1.9000
  7 1.9004
  8 1.8996
  9 1.9167
 10 1.7206
 11 2.8526
    2.9000 Schtzer

Extrapolation Nr.  4
Verwendeter Schtzer = 8.0e+00
  0 10.09335529777813
  1 10.09337240486019
  2 10.09337698157409
  3 10.09337820753989
  4 10.09337853600412
  5 10.09337862401179
  6 10.09337864759318
  7 10.09337865391166
  8 10.09337865560415
  9 10.09337865605777
 10 10.09337865617789
 11 10.09337865621441
 12 10.09337865621939 tats. Fehler  4.61319871192245e-12

  0 1.9022
  1 1.9004
  2 1.9001
  3 1.9000
  4 1.9000
  5 1.9000
  6 1.9004
  7 1.8996
  8 1.9169
  9 1.7179
 10 2.8751
    2.9000 Schtzer

Extrapolation Nr.  5
Verwendeter Schtzer = 1.0e+01
  0 10.09337242158266
  1 10.09337698604791
  2 10.09337820873829
  3 10.09337853632520
  4 10.09337862409782
  5 10.09337864761623
  6 10.09337865391783
  7 10.09337865560581
  8 10.09337865605821
  9 10.09337865617801
 10 10.09337865621445
```

```
 11 10.09337865621939 tats. Fehler  4.60786964140425e-12

Zweipunktgauformel in [0,1] angewendet auf 1/sin(x^0.9)-1/x^0.9**************

  0 0.09351981367194
  1 0.09342013679998
  2 0.09338995879317
  3 0.09338169130207
  4 0.09337946943782
  5 0.09337887408474
  6 0.09337871459357
  7 0.09337867186322
  8 0.09337866041435
  9 0.09337865734675
 10 0.09337865652481
 11 0.09337865630457
    0.09337865622396 exakt, tats. Fehler -8.06087557814195e-11

  0 1.7238
  1 1.8680
  2 1.8957
  3 1.9000
  4 1.9003
  5 1.9001
  6 1.9001
  7 1.9000
  8 1.9000
  9 1.9000
    1.9000 berechneter Schtzer

Extrapolation Nr.  1
  0 0.093383653616450
  1 0.093378913204168
  2 0.093378665280196
  3 0.093378656203223
  4 0.093378656176857
  5 0.093378656217488
  6 0.093378656223287
  7 0.093378656223901
  8 0.093378656223959
  9 0.093378656223963
 10 0.093378656223964 tats. Fehler  2.91433543964104e-16



Die Ordnungen haben bei der Mittelpunktsformel offenbar die
folgende Entwicklung:
                    Mittelp  1. Extrap  2. Extrap
Beispiel 1/(x+1)     : 2         4
Beispiel sqrt x      : 1.5       2          4
Beispiel 1/sqrt x    : 0.5       2          4
Beispiel 1/(x^0.9)   : 0.1       2
Beispiel 1/sin(x^0.9): 0.1       2 danach keine Verbesserung

Die Ordnungen haben bei der Zweipunktgauformel offenbar die
folgende Entwicklung:
                    Mittelp  1. Extrap  2. Extrap
Beispiel 1/(x+1)     : 4
Beispiel sqrt x      : 1.5
Beispiel 1/sqrt x    : 0.5       4
Beispiel 1/(x^0.9)   : 0.1
Beispiel 1/sin(x^0.9): 0.1  danach keine Verbesserung

}
```