Numerische Mathematik für StudentInnen mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

Bogen 11: Übungen am 4. Februar 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P31. Das Interpolationspolynom in Lagrangescher Form lautet: $L(x) = \sum_{j=0}^n \ell_j(x) f(x_j)$, wobei die ℓ_j die Lagrange-Koeffizienten sind. Daraus folgt $I_n(f) := I(L) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j)$ mit $\alpha_j := I(\ell_j)$.

Aufgabe P32. Für zwei Knoten x_0, x_1 lauten die Lagrange-Koeffizienten (man vgl. Aufgabe P27)

$$\ell_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \ell_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Also ist (in der Terminologie der Aufgabe P31)

$$\alpha_0 = \frac{\int_a^b (x - x_1)\,\mathrm{d}x}{x_0 - x_1} = \frac{(b - x_1)^2 - (a - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)}, \quad \alpha_1 = \frac{\int_a^b (x - x_0)\,\mathrm{d}x}{x_1 - x_0} = \frac{(b - x_0)^2 - (a - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)},$$

und die fertige Integrationsformel heißt

$$I_1 = \frac{((a - x_1)^2 - (b - x_1)^2) f(x_0) + ((b - x_0)^2 - (a - x_0)^2) f(x_1)}{2(x_1 - x_0)}.$$

Hat man einen doppelten Knoten x_0, so geht das Interpolationspolynom über in das Taylorsche Polynom $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, und wir erhalten

$$\tilde{I}_1(f) := I(p) = f(x_0)(b - a) + \frac{1}{2} f'(x_0)((b - x_0)^2 - (a - x_0)^2).$$

Das ist ein neuer Typ einer Integrationsformel, der eine Ableitung enthält. Für $x_0 := M := (a+b)/2$ reduziert sich diese Formel allerdings auf die Mittelpunktsformel $\tilde{I}_1(f) = I_0(f) = (b-a) f(M)$. Alle hier vorkommenden Formeln haben (mindestens) die Ordnung zwei, da p für lineare Funktionen f mit f übereinstimmt. Die Fehler können für $f \in \mathrm{C}^2[a,b]$ abgeschätzt werden durch

$$|I(f) - I_1(f)| \leq \max_{x \in [a,b]} \frac{|f''(x)|}{2} \int_a^b |(x - x_0)(x - x_1)|\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe P33. Im Idealfall hat man für einen interpolierenden Spline $s \in \mathbb{S}_k$ auf dem Gitter $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ eine Darstellung der Form

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n+k-1} \alpha_j b_j(x)$$

wobei die b_j, $j = 1, 2, \ldots, n + k - 1$ den Raum $\mathbb{S}_k$ aufspannen, und die α_j so bestimmt sind, daß $s(t_j) = f(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Dann lautet die entsprechende Quadraturformel

$$Q_k(f) = \sum_{j=1}^{n+k-1} \alpha_j \int_a^b b_j(x)\,\mathrm{d}x. \tag{L11.1}$$

Man vergleiche als speziellen Fall die nachfolgende Aufgabe 21.

Aufgabe 21. Die Eigenschaft $l_j(t_k) = \delta_{jk}$ folgt unmittelbar aus der Definition (11.1). Sei $\sum_{k=j}^{j+n} \alpha_k l_k(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. Wir setzen nacheinander $t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n}$ für x ein und erhalten nacheinander $a_j = a_{j+1} = \cdots = \alpha_{j+n} = 0$. Damit haben wir die Unabhängigkeit der $n+1$ Funktionen l_k bewiesen. Wegen $\dim \mathbb{S}_2 \le n+1$ folgt $\dim \mathbb{S}_2 = n+1$. Damit bilden die Funktionen $l_k, k = j, j+1, \ldots, j+n$ eine Basis von $\mathbb{S}_2$, und jedes Basiselement l_k hat einen kompakten Träger $[t_{k-1}, t_{k+1}]$. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, so ist der *Träger von f* die Menge

$$Tr(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) \neq 0\}}. \tag{L11.2}$$

Der Strich $\overline{}$ bedeutet, daß der Abschluß gebildet werden soll. Der Träger ist also definitionsgemäß immer eine abgeschlossene Menge.

Aufgabe 22. Wir setzen $M_j := s''(t_j) = R_j''(t_j)$. Wegen $s \in \mathrm{C}^2[a,b]$ ist $R_j''(t_{j+1}) = R_{j+1}''(t_{j+1})$. Aus den Gleichungen für $R_j''(t_j), R_j''(t_{j+1})$ (S. 60, hinter Tabelle 3.37) kann man s_j, s_{j+1} eliminieren. Man erhält mit der Abkürzung $q_j = \Delta f_j / \Delta t_j$

$$s_j = q_j - \frac{1}{6}\Delta t_j (2M_j + M_{j+1}), \tag{L11.a}$$

$$s_{j+1} = q_j + \frac{1}{6}\Delta t_j (M_j + 2M_{j+1}). \tag{L11.b}$$

Da der Ausdruck aus Formel (L11.a) für $j+1$ mit dem Ausdruck aus Formel (L11.b) übereinstimmen muß, erhält man nach etwas Rechnung die angegebenen Formeln für die M_j. Es ist zu beachten, daß es $n+1$ Größen M_j gibt, aber nur $n-1$ Gleichungen. Man kann z. B. $M_0 = M_n = 0$ wählen und erhält dann den bekannten *natürlichen*, kubischen Spline als Lösung. Sind die M_j bekannt, kann man mit (L11.a) oder (L11.b) die s_j bestimmen und damit die Koeffizienten a_j, b_j, c_j, d_j nach der ersten Zeile von Tabelle 3.37 (S. 60).