Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 9: Übungen am 20. Januar 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P25. Wir werten die Formel (3.78) auf S. 63 nach den auf S. 22 angegebenen Methoden aus. D. h. wir verwenden die Formel (2.20). Wir gehen also bei geradem $N = 2M$ aus von

$$c_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tau_k w_N^{-jk},\ j = 0, 1, \ldots, M,\ \tau_k \in \mathbb{R}$$

und berechnen tatsächlich ersatzweise

$$t_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{M-1} (\tau_{2k} + \mathrm{i}\,\tau_{2k+1}) w_M^{-jk},\ j = 0, 1, \ldots, M-1.$$

Für den Fall, daß N eine Zweierpotenz ist, kann diese Formel mit den FFT-Methoden ausgewertet werden. Die gesuchten Koeffizienten sind dann mit $t_M = t_0$ (vergleichen Sie Aufgabe 8)

$$c_j = 0.5(t_j + \overline{t_{M-j}} - \mathrm{i}\, w_N^{-j}(t_j - \overline{t_{M-j}})),\ j = 0, 1, \ldots, M,$$

und die endgültige trigonometrische Summe ergibt sich nach den Formeln (3.86)–(3.88), S.64/65. Für $N = 4$ hat man

$$t_0 = \frac{1}{4}(\tau_0 + \mathrm{i}\,\tau_1 + \tau_2 + \mathrm{i}\,\tau_3), \quad t_1 = \frac{1}{4}(\tau_0 + \mathrm{i}\,\tau_1 + (\tau_2 + \mathrm{i}\,\tau_3) w_2^{-1}), \quad t_2 = t_0.$$

Nun ist $w_2^{-1} = -1$. Man erhält also $t_1 = \frac{1}{4}(\tau_0 - \tau_2 + \mathrm{i}(\tau_1 - \tau_3))$. Das Endergebnis ist dann

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0.5(t_0 + \overline{t_0} - \mathrm{i}(t_0 - \overline{t_0})) = \Re t_0 + \Im t_0 = \frac{1}{4}(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) = a_0/2,\\
c_1 &= 0.5(t_1 + \overline{t_1} - (t_1 - \overline{t_1})) = \Re t_1 - \mathrm{i}\,\Im t_1 = \frac{1}{4}(\tau_0 + \tau_2 - \mathrm{i}(\tau_1 - \tau_3)) = (a_1 - \mathrm{i}\, b_1)/2,\\
c_2 &= 0.5(t_0 + \overline{t_0} + \mathrm{i}(t_0 - \overline{t_0})) = \Re t_0 - \Im t_0 = \frac{1}{4}(\tau_0 + \tau_2 - \tau_1 - \tau_3) = a_2/2.
\end{aligned}$$

Aufgabe P26. Durch Integration von Interpolationspolynomen.

Aufgabe P27. Es ist $I_1(f) := I(p)$ mit $p(x) = l_0(x)f(x_0) + l_1(x)f(x_1)$ in der Lagrangeschen Form. Wir müssen also $I(l_0) = \int_a^b \frac{(x-x_1)\,\mathrm{d}x}{x_0 - x_1}$, $I(l_1) = \int_a^b \frac{(x-x_0)\,\mathrm{d}x}{x_1 - x_0}$ berechnen. Das gibt

$$\alpha_0 := I(l_0) = \frac{(b-x_1)^2 - (a-x_1)^2}{2(x_0 - x_1)}, \quad \alpha_1 := I(l_1) = \frac{(b-x_0)^2 - (a-x_0)^2}{2(x_1 - x_0)}.$$

Für drei Knoten erhält man entsprechend

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)\,\mathrm{d}x}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(b-x_2)^2(3(b-x_1)-(b-x_2)) - (a-x_2)^2(3(a-x_1)-(a-x_2))}{6(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\\
\alpha_1 &= \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_2)\,\mathrm{d}x}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(b-x_2)^2(3(b-x_0)-(b-x_2)) - (a-x_2)^2(3(a-x_0)-(a-x_2))}{6(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\\
\alpha_2 &= \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\,\mathrm{d}x}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(b-x_1)^2(3(b-x_0)-(b-x_1)) - (a-x_1)^2(3(a-x_0)-(a-x_1))}{6(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17. Bei der zu beweisenden Formel geht es um die sog. Leibniz-Formel (Beweis nach C. de Boor, A practical guide to splines, Springer, New York, 1978, p. 5, die Herleitung wird dort W. D. Kammler zugesprochen). Wir betrachten das Produkt der Newton-Formen

$$F(x) := \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j](x-x_0)\cdots(x-x_{j-1}) \sum_{k=0}^{n} g[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n](x-x_{k+1})\cdots(x-x_n).$$

Ganz offensichtlich ist $F(x_\ell) = fg(x_\ell)$ für alle $\ell = 0, 1, \ldots, n$. Ausmultiplizieren ergibt $F = \sum_{j,k=0}^{n} = \sum_{0\le j\le k}^{n} + \sum_{j>k\ge 0}^{n}$. Für die letzte Summe gilt am Knoten $x = x_\ell$, $\ell = 0, 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j>k\ge 0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j]g[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n](x_\ell - x_0)\cdots(x_\ell - x_{j-1})(x_\ell - x_{k+1})\cdots(x_\ell - x_n) = 0.$$

Also ist $F = \sum_{0\le j\le k}^{n}$ an diesen Knoten und diese Summe stimmt daher mit fg an diesen Knoten überein. Nun ist aber $\sum_{0\le j\le k}^{n}$ ein Polynom vom Grad n. Der Höchskoeffizient $\sum_{j=k} f[x_0, x_1, \ldots, x_j]g[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]$ muß daher mit $fg[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ übereinstimmen. Die hergeleitete Formel ist auch für mehrfache Knoten richtig. Bei gleichen Knoten $x_0 = x_1 = \cdots = x_n$ ist also

$$fg[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{(fg)^{(n)}(x_0)}{n!} = \sum_{j=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_j]g[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\frac{f^{(n-j)}(x_0)}{(n-j)!}.$$

Multipliziert man mit $n!$ und beachtet $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$, so erhält man

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x_0) f^{(n-j)}(x_0).$$

Diese Formel wird auch als Leibnizsche Formel bezeichnet, z. B. von H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 9. Aufl., Teubner, 1991, S. 272.

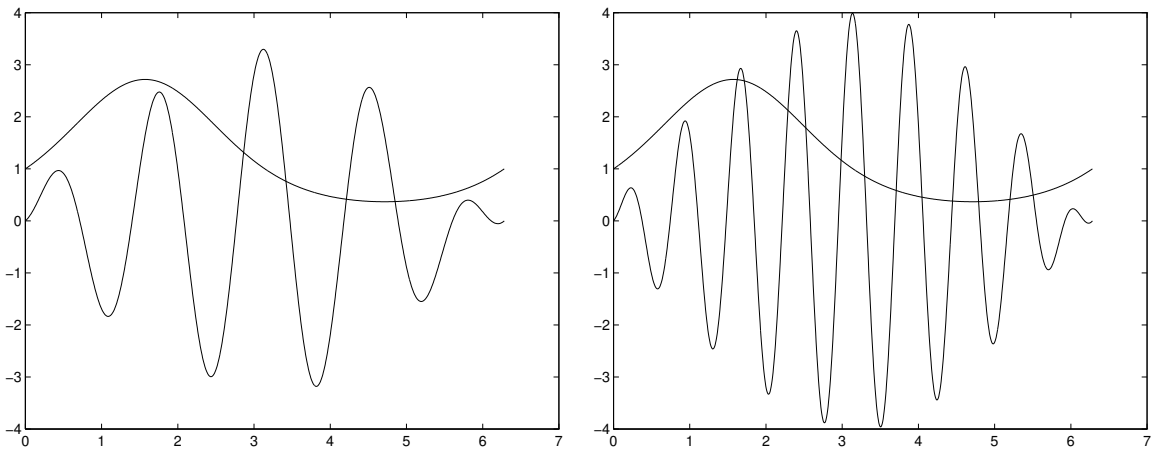
Aufgabe 18. Die trigonometrischen Approximationen von $f(x) = \exp(\sin(x))$, $x \in [0, 2\pi]$ haben in Abhängigkeit von N die folgenden Fehler (das trigonometrische Polynom wird mit t_N bezeichnet):

$N = 4$: $\approx 5.5\cdot 10^{-1}$, $N = 8$: $\approx 1.1\cdot 10^{-2}$, $N = 16$: $\approx 4.0\cdot 10^{-7}$, $N = 32$: $\approx 10^{-15}$ (nicht registrierbar).

Die Koeffizienten stehen für $N = 8$ in Tabelle L9.1, die Graphen der Fehler $f - t_N$ in Figur L9.2:

Tabelle L9.1. Fourierkoeffizienten von $f = \exp(\sin)$ bei $N = 8$

Nr.	a	b
0	2.53213215392898	–
1	0	1.13032141745820
2	−0.27154031740762	0
3	0	−0.04487977618560
4	0.01094848088627	–



Figur L9.2. Trigonometrische Interpolation von $f = \exp(\sin)$ mit $N = 8$ und $N = 16$. Gezeichnet sind f und $f - t_N$ in vergrößertem Maßstab