Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 8: Übungen am 13. Januar 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P22. Werde f an der Stelle $x = a$ bis zur n-ten Ableitung interpoliert ($(n+1)$-facher Knoten). Das resultierende Hermite-Interpolationspolynom vom Grade n ist das Taylorpolynom

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j.$$

Der Fehler ist

$$\varepsilon(x) := f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \xi = (1-\lambda)a + \lambda x,\ \lambda \in [0,1].$$

Aufgabe P23. Die Fehlerabschätzung lautet bei Interpolation bis zur m-ten Ableitung an beiden Endpunkten von $[a,b]$ (also $(m+1)$-fache Knoten an beiden Enden)

$$\varepsilon(x) := f(x) - p(x) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}[(x-a)(x-b)]^{m+1},\ \xi \in [a,b] \text{ für } x \in [a,b].$$

Für das Knotenpolynom $\omega(x) = [(x-a)(x-b)]^{m+1}$ gilt $|(\omega(x)| = [(x-a)(b-x)]^{m+1}$ sofern $x \in [a,b]$ liegt. Das Maximum wird in der Mitte M angenommen, und daher erhält man mit $M = (a+b)/2,\ L = b-a$

$$\max_{x\in[a,b]} |(\omega(x)| = [(M-a)(b-M)]^{m+1} = [\frac{L}{2}\frac{L}{2}]^{m+1} = \frac{L^{2m+2}}{2^{2m+2}}.$$

Aufgabe P24. Die Interpolationsdaten sind $(0,0,1); (\pi/4, 0.5\sqrt{2}, 0.5\sqrt{2}); (\pi/2, 1, 0)$. Die Fehlerabschätzung lautet wegen $|f^{(j)}(x)| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $j = 0, 1, \ldots$

$$\max_{x\in[0,\pi/2]} |\varepsilon(x)| \le \frac{1}{6!} \max_{x\in[0,\pi/2]} [x(x-\pi/4)(x-\pi/2)]^2 \approx 4.8295 \cdot 10^{-5}.$$

Die dividierten Differenzen lauten

x_j	f_j	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ]$
0	0	1	-0.126921	-0.151618	0.023777	0.005722
0	0	$2\sqrt{2}/\pi$	-0.246002	-0.114269	0.032765	
$\pi/4$	$0.5\sqrt{2}$	$0.5\sqrt{2}$	-0.425496	-0.062802		
$\pi/4$	$0.5\sqrt{2}$	$(4-2\sqrt{2})/\pi$	-0.474821			
$\pi/2$	1	0				
$\pi/2$	1					

Aufgabe 15. (a) Schreibt man das Polynom naiv in die Form

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

mit den Unbekannten a, b, c, so ist das gegebene Problem als ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & 2x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

aufzufassen. Das Gleichungssystem hat genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn $\det(\mathbf{A}) = (x_2 - x_0)(x_2 + x_0 - 2x_1) \neq 0$. Das ist genau dann der Fall, wenn x_1 nicht genau in der Mitte liegt zwischen x_0 und x_2. (b) Ein Ansatz $p = a + bx + cx^2 + dx^3$ führt auf ein lineares Gleichungssystem mit Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\det(\mathbf{A}) = 2(x_2 - x_0)(3x_1^2 - 3x_1(x_0 + x_2) + x_0^2 + x_0 x_2 + x_2^2)$ und die Determinante verschwindet falls

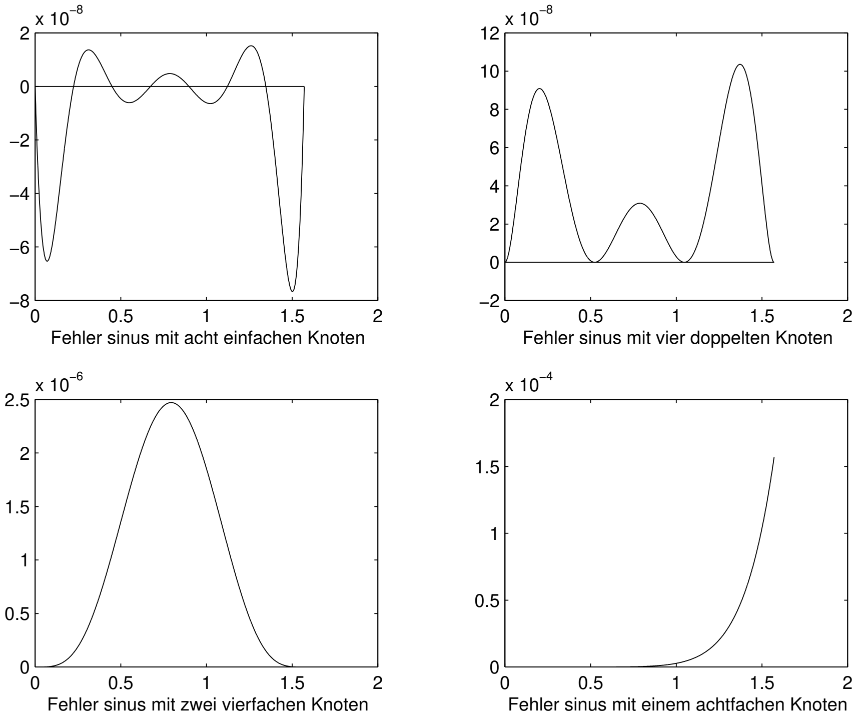
$$x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{6}|x_2 - x_0|.$$

Wegen $x_0 \neq x_2$ ist das Interpolationsproblem also für jedes reelle x_1 lösbar. Interpolationsprobleme bei denen an den Knoten nicht alle Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung vorgegeben sind, heißen *Birkhoff-Interpolationsprobleme*. Sie sind offenbar manchmal lösbar und manchmal nicht.

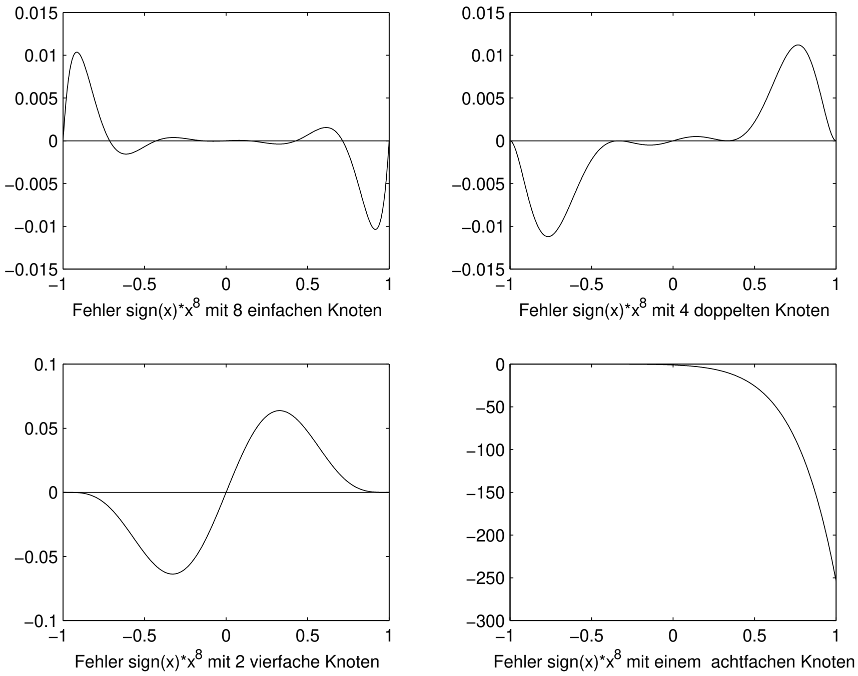
Aufgabe 16. Die dividierten Differenzen können mit dem Programm L8.1 berechnet werden. Verschiedene Beispiele sind in den Figuren L8.2-4 dokumentiert.

Programm L8.1 Dividierte Differenzen für zusammenfallende Knoten

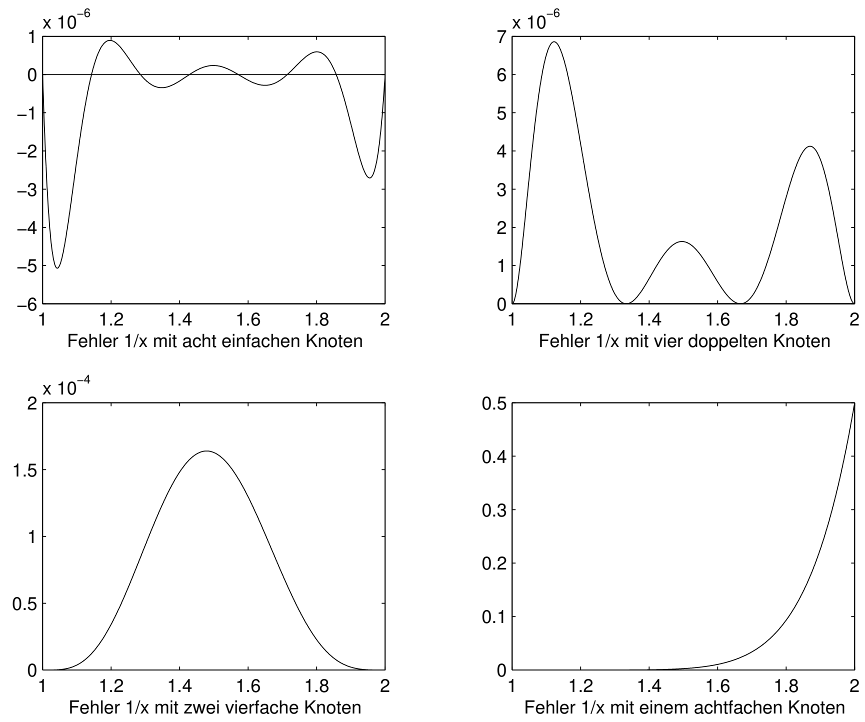
```
{-----------------------------------------------------------------------------}
procedure div_diff(N:integer;Knoten,Werte:vektor;abl:matrix; var d_diff:vektor);
{Es werden die dividierten Differenzen, die man zur Hermite-Interpolation}
{bei mehrfachen Knoten bentigt, ausgerechnet ohne Beanspruchung von}
{zustzlichen Speicherpltzen. Die Werte mssen entsprechend auch mehrfach}
{besetzt werden. Die Ableitungen werden durch die Matrix abl[0..Nmax,0..Nmax]}
{realisiert. Dabei ist abl[j,k] die j-te Ableitung am Knoten k, dividiert durch j!}
  var j,k:integer;
  begin
    d_diff:=Werte;
    for j:=1 to N do
      for k:=N downto j do
      if Knoten[k]-Knoten[k-j]<>o then
        d_diff[k]:=(d_diff[k]-d_diff[k-1])/(Knoten[k]-Knoten[k-j]) else
        d_diff[k]:=abl[j,k];
  end; {procedure}
{-----------------------------------------------------------------------------}
```



Figur L8.2. Interpolationsfehler von sin bei acht Knoten: einfach, doppelt, vierfach, achtfach



Figur L8.3. Interpolationsfehler von $\mathrm{sign}(x)x^8$ bei acht Knoten: einfach, doppelt, vierfach, achtfach



Figur L8.4. Interpolationsfehler von $1/x$ bei acht Knoten: einfach, doppelt, vierfach, achtfach

Für die drei Fälle gewinnt man mit der Formel (3.40), Buch, 2. Aufl., S. 52 die aus der Tabelle L8.5 zu entnehmenden Fehlerabschätzungen:

Tabelle L8.5. Fehlerabschätzungen für interpolierende Hermite-Polynome

Funktion	Intervall	8 einfache Kn.	4 doppelte Kn.	2 vierfache Kn.	1 achtfacher Kn.
sin	$[0, \pi/2]$	$1.0215e-7$	$1.4011e-7$	$3.5909e-6$	$9.1926e-4$
$\operatorname{sign}(x)x^8$	$[-1, 1]$	$-$	$-$	$-$	$-$
x^8	$[-1, 1]$	$2.8446e-2$	$3.9018e-2$	1	256
$1/x$	$[1, 2]$	$1.1112e-4$	$1.5241e-4$	$3.9062e-3$	1

Man sieht, daß insbesondere das Taylorpolynom über das ganze Intervall eine schlechte Approximation darstellt. Für $f(x) = \operatorname{sign}(x)x^8$ haben wir wegen $f \notin \mathrm{C}^8[-1, 1]$ keine Fehlerabschätzung angegeben, aber zum Vergleich für $f(x) = x^8$.