Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 7: Übungen am 6. Januar 1998

Lösungshinweise

Aufgabe P19. Wir benutzen die Formel vom Buch, S. 45, unten, mit $y \in [c,d] = [0,n]$ und $x \in [a,b]$. Dann ist für $b-a=2$

$$\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)| = \big(\frac{b-a}{n}\big)^{n+1} \max_{y\in[0,n]} |\tilde\omega(y)| \geq \big(\frac{b-a}{n}\big)^{n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!} = \frac{(2n)!}{n^{n+1}2^n n!}.$$

Daraus ergeben sich für $n = 1, 2, \ldots, 10$ die Werte

$n = 1:$	1,	$n = 2:$	0.37500000000000,
$n = 3:$	0.18518518518519,	$n = 4:$	0.10253906250000,
$n = 5:$	0.06048000000000,	$n = 6:$	0.03713348765432,
$n = 7:$	0.02344139893120,	$n = 8:$	0.01510251313448,
$n = 9:$	0.00988286657188,	$n = 10:$	0.00654729075000.

Aufgabe P20. Die allgemeine Formel für den Fehler des Interpolationspolynoms n-ten Grades im Intervall $[a,b]$ für $f \in \mathrm{C}^{(n+1)}[a,b]$ ist

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j), \quad \xi \in [a,b].$$

Für $f = \sin$ ist $|f^{(n+1)}| \leq 1$ für alle n. Für $n = 1$ ist somit $|\varepsilon(x)| \leq 1/2|x(x-\pi/2)| \leq \pi^2/32 \approx 0.31$, für $n = 2$ ist $|\varepsilon(x)| \leq 1/6|x(x-\pi/4)(x-\pi/2)| \approx 0.0311$. Für $f(x) = \mathrm{e}^x$ ist $|f^{(n+1)}| \leq \mathrm{e}$ unabhängig von n. Also erhält man $|\varepsilon(x)| \leq \mathrm{e}/2 \cdot 0.25 \approx 0.3398$, bzw. $|\varepsilon(x)| \leq \mathrm{e}/6 \cdot |x(x-0.5)(x-1)| \leq 0.0218$, für $f(x) = 1/x$ ist $|f^{(n+1)}|/(n+1)! \leq 1$, also ist $|\varepsilon(x)| \leq |(x-1)(x-2)| \leq 1/4$, bzw. für $n = 2$ ist $|\varepsilon(x)| \leq |(x-1)(x-1.5)(x-2)| \leq 0.0481$.

Aufgabe P21. Gegeben sind

$$T_0 = 1, T_1 = y,$$

daraus folgt nach der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} T_{n+1}(y) &= 2yT_n(y) - T_{n-1}(y),\ n = 1, 2, \ldots \quad \text{also} \\ T_2 &= 2yT_1 - T_0 = 2y^2 - 1, \\ T_3 &= 2yT_2 - T_1 = 4y^3 - 3y, \\ T_4 &= 2yT_3 - T_2 = 8y^4 - 8y + 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 13. Mit dem Programm aus Aufgabe 5 erhält man Fehler, die in der Nähe von $x = 0$ mit wachsendem n immer größer werden. In der Tabelle 7.1 sind einige Zahlen angegeben.
Tabelle 7.1 Fehler der inversen Interpolation zur Berechnung von arcsin

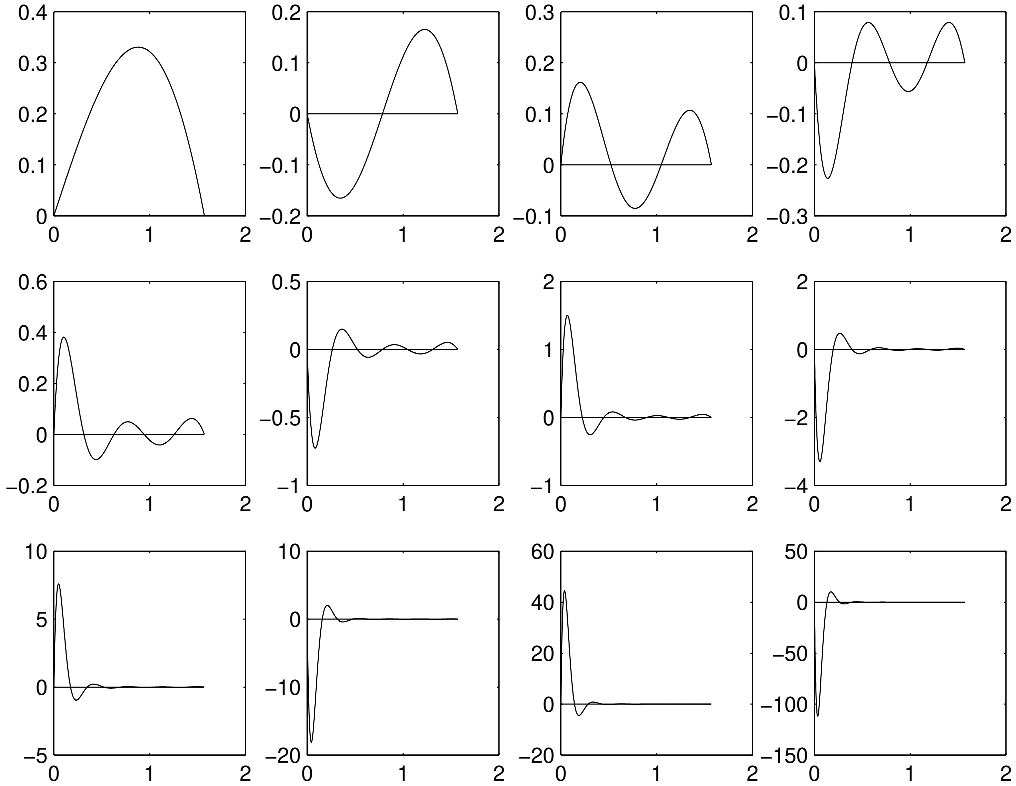
```
Maximal auftretende Fehler von max|arcsin sin(x)-x| in [0,pi/2],
wobei arcsin das Ergebnis der inversen Interpolation ist.

```

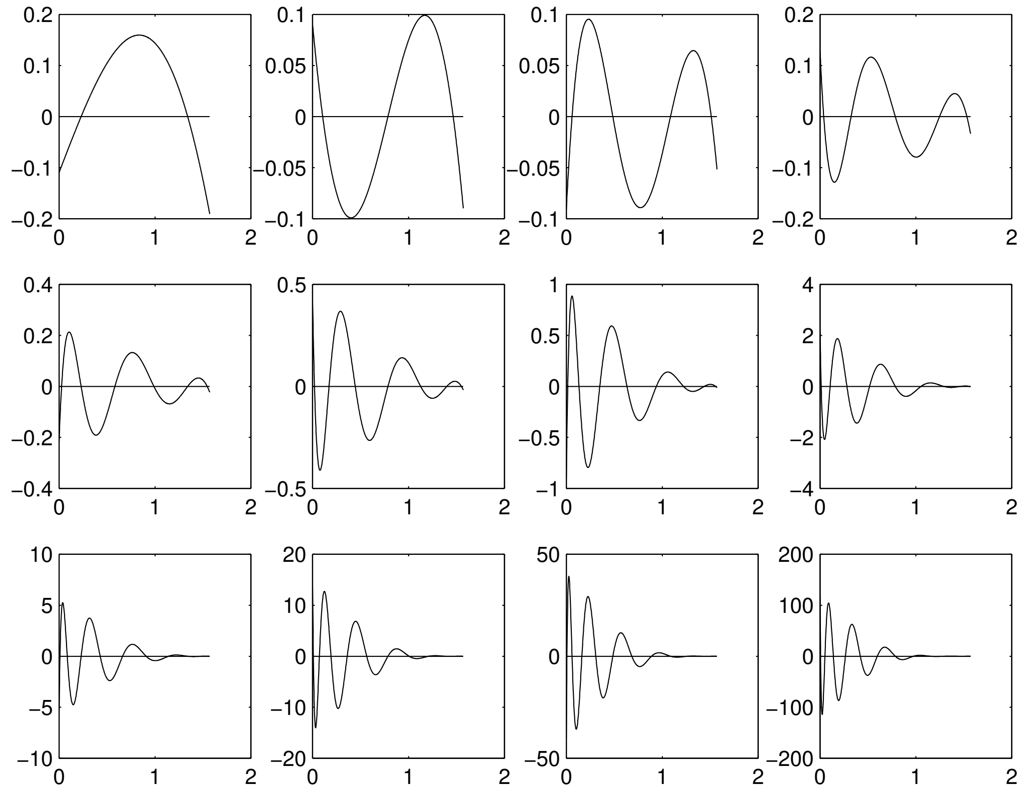
```
Ergebnisse fr quidistante Knoten:   Ergebnisse fr Tschebyscheff-Knoten:

n=1 :   3.30673428493892e-01           1 :  1.90798059721313e-01
  2 :   1.65336714246946e-01           2 :  9.91247688857180e-01
  3 :   1.61873472149212e-01           3 :  9.52964860476961e-02
  4 :   2.26446597642156e-01           4 :  1.28176595303809e-01
  5 :   3.81006286055009e-01           5 :  2.14860565990692e-01
  6 :   7.24920213440846e-01           6 :  4.17985540677126e-01
  7 :   1.49570947144623e+00           7 :  9.05624325030175e-01
  8 :   3.28120065885594e+00           8 :  2.13552488572344e+00
  9 :   7.57801474833156e+00           9 :  5.39104311081121e+00
 10 :   1.80293890780655e+01          10 :  1.43938287460958e+01
 11 :   4.34747305800060e+01          11 :  4.02733253204369e+01
 12 :   1.11317211828761e+02          12 :  1.17246008303144e+02
```

Die Fehler sieht man noch besser in den nachfolgenden Bildern 7.1-7.2. Dort ist die Differenz zwischen dem richtigen und berechneten arcsin aufgetragen.



Figur 7.1. Fehler von arcsin bei inverser Interpolation von sin bei Benutzung von äquidistanten Knoten, Polynomgrade von 1 bis 12



Figur 7.2. Fehler von arcsin bei inverser Interpolation von sin bei Benutzung von Tschebyscheffknoten, Polynomgrade von 1 bis 12

Auch die Umkehrung anderer Funktionen mit Hilfe der inversen Interpolation führt oft zu ähnlich schlechten Resultaten. Gut funktioniert die Umkehrung von $f(x) = \log(x)$, $x \in [1, \mathrm{e}]$. Einige Bilder sind am Schluß in den Figuren 7.3–7.5 angegeben.

Aufgabe 14. (P. Henrici, Discrete variable methods in ordinary differential equations, Wiley, New York, London, 1962, 407 S., S. 190 – 191) (a) Wir beweisen die erste Formel von (7.1) durch vollständige Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Formel offensichtlich richtig. Sei sie für k richtig (Induktionsvoraussetzung). Dann ist unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
\nabla^{k+1} f_n &= \nabla^1(\nabla^k f_n) = \nabla^1(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} f_{n-j}) \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} \nabla^1 f_{n-j} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} (f_{n-j} - f_{n-j-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} f_{n-j} - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1} \binom{k}{j-1} f_{n-j} \\
&= f_n + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} f_{n-j} - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} \binom{k}{j-1} f_{n-j} - (-1)^k f_{n-k-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_n + (-1)^{k+1} f_{n-k-1} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left\{ \binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right\} f_{n-j} \\
&= f_n + (-1)^{k+1} f_{n-k-1} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} f_{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} f_{n-j}.
\end{aligned}
$$

Damit ist die erste Formel bewiesen. (b) Wir beweisen die zweite Formel durch vollständige Induktion nach p. Für $p = 0$ ist die Formel offensichtlich richtig. Sei die Formel für p richtig (Induktionsannahme). Bilden wir auf beiden Seiten die erste Differenz ∇^1, so erhalten wir

$$
\nabla^1 f_{n-p} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \nabla^{j+1} f_n.
$$

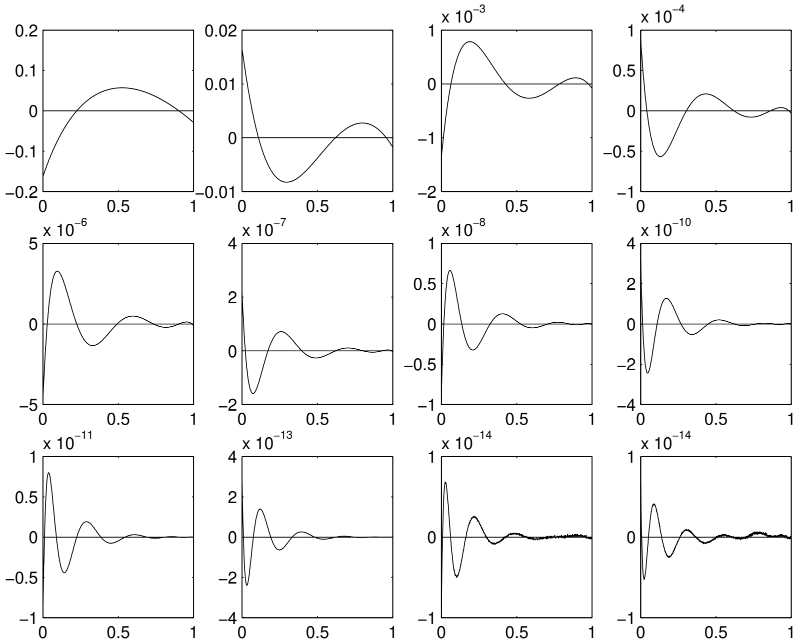
Daraus ergibt sich wegen $\nabla^1 f_{n-p} = f_{n-p} - f_{n-p-1}$ und der Induktionsannahme die Gleichungskette

$$
\begin{aligned}
f_{n-p-1} &= f_{n-p} - \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \nabla^{j+1} f_n \\
&= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \nabla^j f_n - \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \binom{p}{j-1} \nabla^j f_n \\
&= \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \left\{ \binom{p}{j} + \binom{p}{j-1} \right\} \nabla^j f_n + f_n + (-1)^{p+1} \nabla^{p+1} f_n \\
&= \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \binom{p+1}{j} \nabla^j f_n.
\end{aligned}
$$

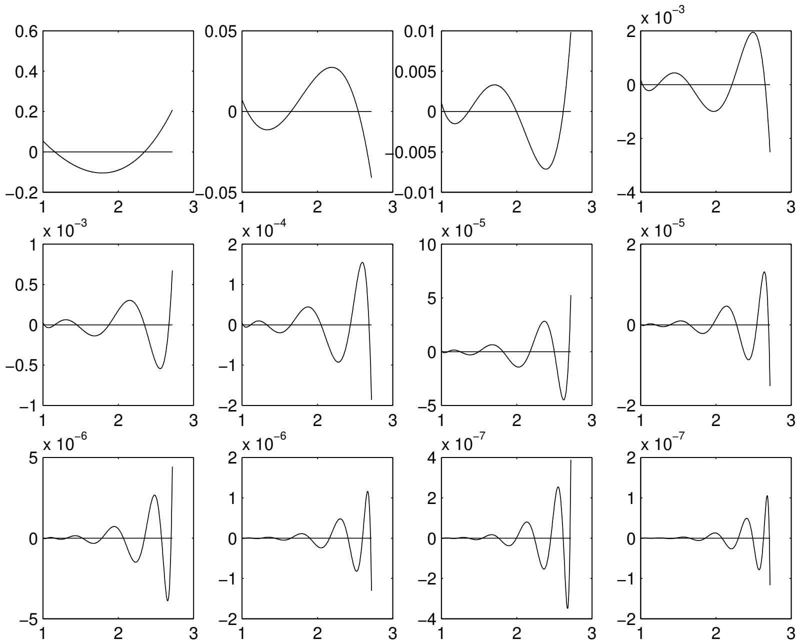
Das beweist die zweite Formel in (7.2). (c) Wir beweisen schließlich Formel (7.1). Der in (7.1) angegebene Ausdruck ist ein Polynom vom (richtigen) Grad n. Wir prüfen, ob es interpoliert. Für $x = x_{n-p}$ ist $s = (x_{n-p} - x_n)/h = -p$. Also ist

$$
p(x_{n-p}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{p}{j} \nabla^j f_n = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \nabla^j f_n = f_{n-p},
$$

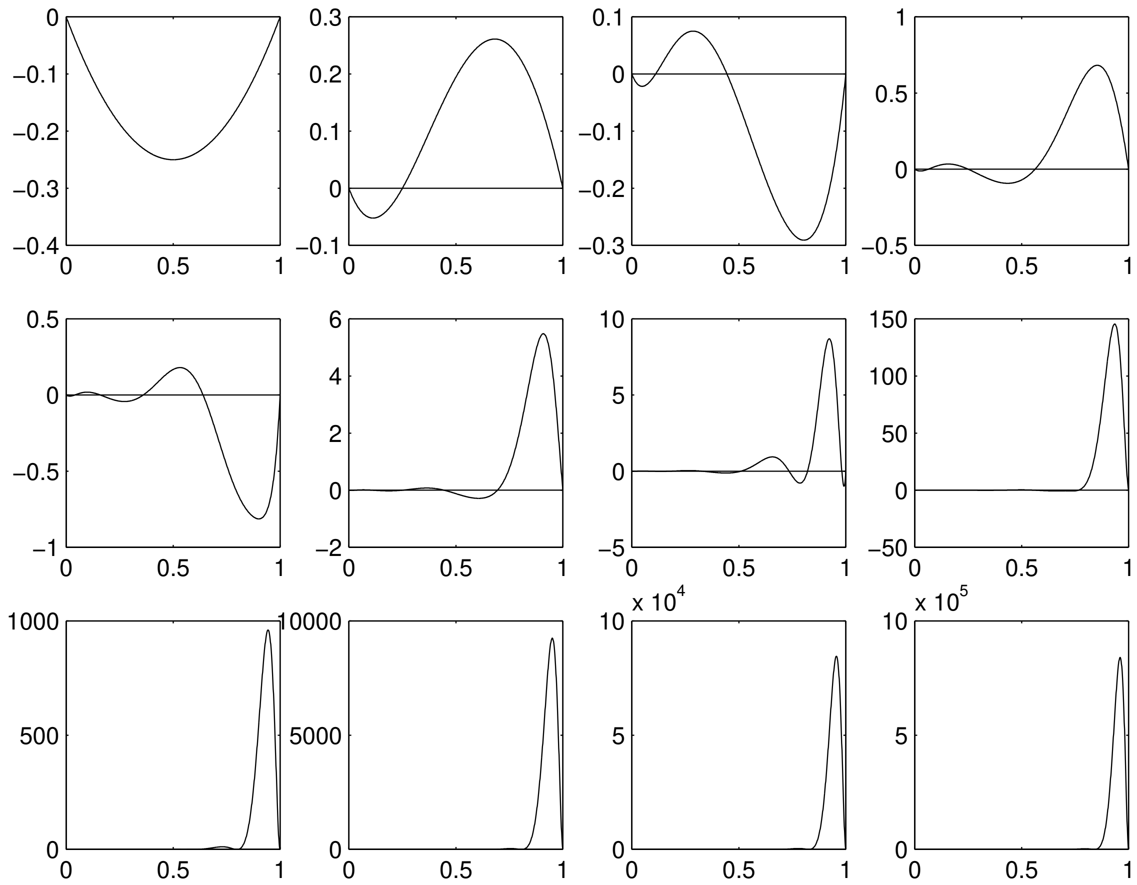
nach der zweiten Formel von (7.2) und wegen $\binom{p}{j} = 0$ für $j > p$ und ganzzahliges p. Damit haben wir alle Formeln bewiesen.
Es kommen jetzt noch einige Bilder zur vorigen Aufgabe.



Figur 7.3. Fehler von log bei inverser Interpolation von exp bei Benutzung von Tschebyscheffknoten, Polynomgrade von 1 bis 12



Figur 7.4. Fehler von exp bei inverser Interpolation von log bei Benutzung von Tschebyscheffknoten, Polynomgrade von 1 bis 12



Figur 7.5. Fehler von $\sqrt{x}$ bei inverser Interpolation von x^2 bei Benutzung von äquidistanten Knoten, Polynomgrade von 1 bis 12