Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 4: Übungen am 25. November und 2. Dezember 1997

Lösungshinweise

Aufgabe P10. Buch, S. 34 – 35.

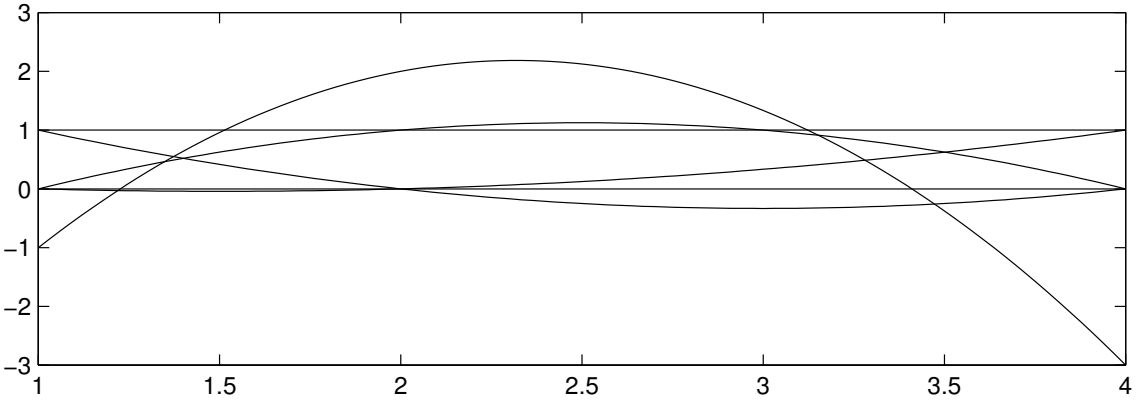
Aufgabe P11. Bei drei Daten (x_0, y_0), (x_1, y_2), (x_2, y_2) sind die Lagrange Koeffizienten

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Das Interpolationspolynom in Lagrangescher Form lautet dann:

$$L(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$

Wählen wir speziell als Daten $(1,-1)$, $(2,2)$, $(4,-3)$, so kann man die Lagrangeschen Koeffizienten l_0, l_1, l_2 und das Lagrange Polynom L in Figur 4.2 betrachten.



Figur 4.2: Lagrangekoeffizienten l_0, l_1, l_2 und Lagrange Polynom L

Aufgabe P12. Buch, S. 36 –37.

Aufgabe 7. Der Graph hat zehn Extremwerte, wir können also $N = 5$ annehmen: $t_5(x) = a_0/2 + \sum_{j=1}^{5}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$. Die Lösung ist

$$t_5(x) = 0.5 + \cos x - 0.5 \sin 5x.$$

Aufgabe 8. Wir müssen die folgenden Terme addieren:

$$t_k + \overline{t_{M-k}} = \sum_{j=0}^{M-1} (c_j w_M^{jk} + \overline{c_j} w_M^{-j(M-k)})$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} (c_j + \overline{c_j}) w_M^{jk} = 2 \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j} w_M^{jk},$$

$$-\mathrm{i} w_N^k t_k + \mathrm{i} w_N^k \overline{t_{M-k}} = \sum_{j=0}^{M-1} (-\mathrm{i} c_j w_M^{jk} + \mathrm{i}\overline{c_j} w_M^{-j(M-k)}) w_N^k$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} \mathrm{i}(-c_j + \overline{c_j}) w_M^{jk} w_N^k = 2 \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j+1} w_M^{jk} w_N^k.$$

Nun ist aber

$$2d_k = 2 \sum_{j=0}^{M-1} (f_{2j} w_N^{2jk} + f_{2j+1} w_N^{(2j+1)k}) = 2 \sum_{j=0}^{M-1} (f_{2j} + f_{2j+1} w_N^k) w_M^{jk}.$$

Die Summen stimmen also überein.