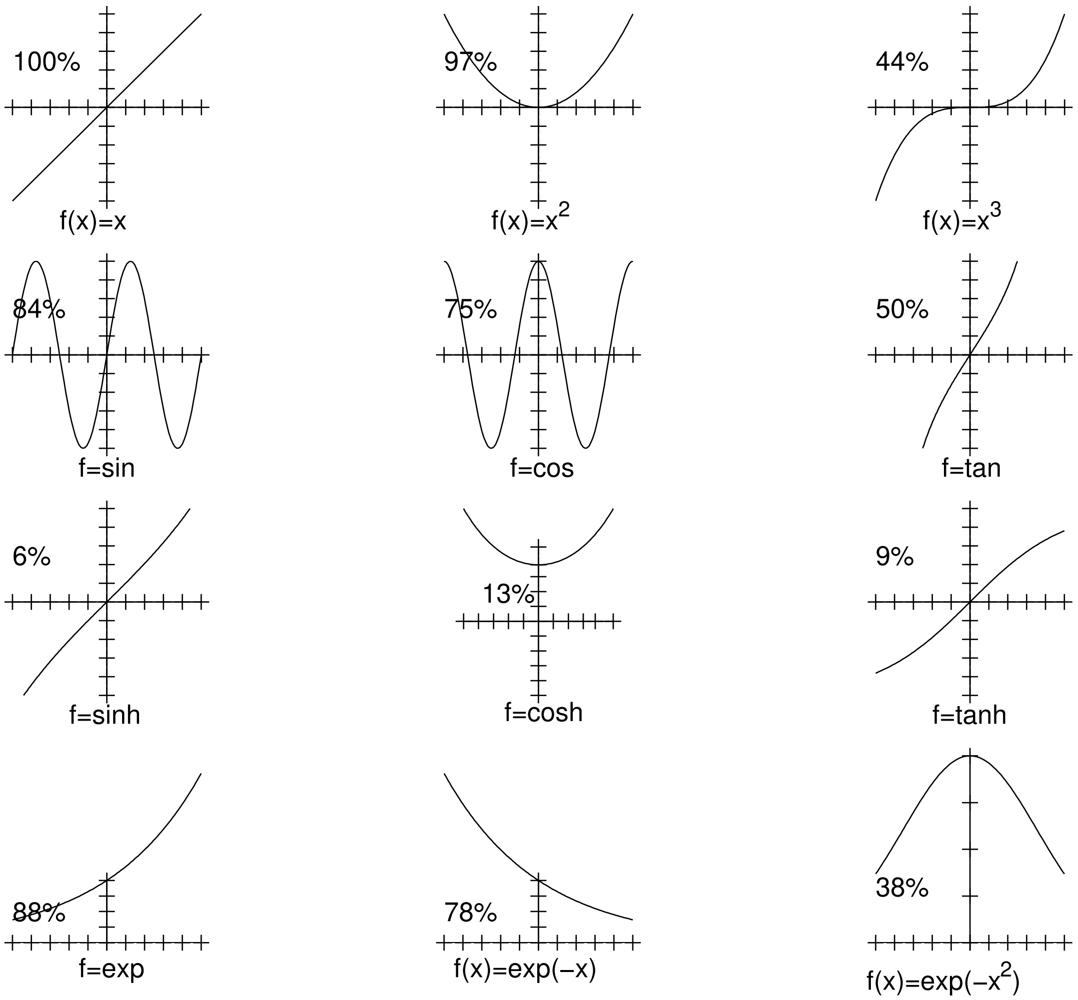
Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 3: Übungen am 18. und 25. November 1997

Lösungshinweise

Aufgabe P7. Die Zeichnungen haben etwa das folgende Aussehen (richtige Lösungen in %):



Aufgabe P8. Im Horner-Schema werden genau die Zahlen $c_j = \frac{p^{(j)}(\xi)}{j!}$ ausgerechnet (Buch, Seiten 14–15). Mit den angegebenen c_j ist (3.1) das Taylor-Polynom von p, und alle Ableitungen von p an der Stelle ξ können sofort angegeben werden.

Aufgabe P9. Wir haben $a_0 = 4, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3, b_1 = -1, b_2 = -4, b_3 = 2$. Daraus folgt $\gamma_1 = 1 + \mathrm{i}, \gamma_2 = 3 + 4\mathrm{i}, \gamma_3 = 3 - 2\mathrm{i}; c_0 = a_0/2 + a_3 = 5, c_1 = \gamma_1 + \overline{\gamma_2} = 1 + \mathrm{i} + 3 - 4\mathrm{i} = 4 - 3\mathrm{i}, c_2 = \gamma_2 + \overline{\gamma_1} = 3 + 4\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i} = 4 + 3\mathrm{i}$. Wegen $\sin N x_k = 0$ für jedes k wird der Koeffizient b_N, hier also b_3 nicht gebraucht.

Aufgabe 5. Wir schreiben $d_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j w_N^{jk}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ unter den angegebenen Voraussetzungen in die Form

$$d_k = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{\ell=0}^{q-1} c_{j+p\ell} w_N^{k(j+p\ell)} = \sum_{j=0}^{p-1} w_N^{kj} \sum_{\ell=0}^{q-1} c_{j+p\ell} w_q^{k\ell}.$$

Wir setzen jetzt

$$e_k^{(j)} = \sum_{\ell=0}^{q-1} c_{j+p\ell} w_q^{k\ell}, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Dann ist

$$d_k = \sum_{j=0}^{p-1} e_k^{(j)} w_N^{kj}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Kennen wir die $e_k^{(j)}$, so können wir jedes d_k mit $p-1$ Multiplikationen ausrechnen. Wir fassen d_k als Polynom in w_N^k auf. Zusammen benötigen wir $(p-1)N$ Multiplikationen. Wegen $e_{k+q}^{(j)} = e_k^{(j)}$ benötigen wir die Größen $e_k^{(j)}$ nur für $k = 0, 1, \ldots, q-1$. Insgesamt müssen wir also p Fourier-Transformationen der Länge q ausführen.

Aufgabe 6. Wir setzen $z = \exp(ix)$ für $x \in [0, 2\pi[$ und $\gamma_0 = a_0/2$, $\gamma_j = (a_j - ib_j)/2$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Dann ist $|z| = 1$ und $\bar{z} = 1/z$. Nach bereits durchgeführten Rechnungen ist $t_N(x) = \gamma_0 + 2\sum_{j=1}^{N} \Re\{\gamma_j z^j\} = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{N}(\gamma_j z^j + \overline{\gamma_j z^j}) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{N}(\gamma_j z^j + \overline{\gamma_j} z^{-j}) = z^{-N}[\gamma_0 z^N + \sum_{j=1}^{N}(\gamma_j z^{j+N} + \overline{\gamma_j} z^{N-j})]$. Also ist $t_N = z^{-N} p(z)$ und $p \in \Pi_{2N}$. Da $|z^{-N}| = 1$, kann t_N also höchstens $2N$ Nullstellen haben. Gibt es mit einer Geraden $2N$ Schnittpunkte, so muß das trigonometrische Polynom mindesten den Grad N haben. Da die Ableitungen wieder trigonometrische Polynome vom Grad N sind, haben auch die Ableitungen bis zu $2N$ Nullstellen.