Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 1: Übungen am 4. und 11. November 1997

Lösungshinweise

Aufgabe P1.

23	108.34	-0.000987	306.020	25	-100	1000	12345
2.3E1	1.0834E2	-9.87E-4	3.06020E2	11001	-1100100	1111101000	1100 0000111001

Aufgabe P2. Die Zahlen ohne die Null haben die Form $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\mathrm{E}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$, wobei die eingerahmte Zahl die Anzahl der möglichen Stellen an den einzelnen Positionen angibt. In dieser Zählung werden allerdings die Exponenten $+0\cdots 0, -0\cdots 0$ als verschieden gezählt. Davon gibt es hier insgesamt vier Stück. Es gibt also $2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-4+1=29$ Maschinenzahlen. Die 14 positiven Zahlen sind:

+1.0E−11, +1.1E−11, +1.0E−10, +1.1E−10, +1.0E−01, +1.1E−01, +1.0E−00,
+1.1E+00, +1.0E+01, +1.1E+01, +1.0E+10, +1.1E+10, +1.0E+11, +1.1E+11.

Die erste (kleinste, positive) Zahl ist $\mu = 1\cdot 2^{-3} = \frac{1}{8}$, die größte Zahl ist $M = 1.1\cdot 2^3 = (1+\frac{1}{2})\cdot 8 = 12$. Die Maschinengenauigkeit ist $\frac{1}{2}\cdot 2^{-1} = 0.25$. Der andere Rechner in obiger Darstellung ist $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\mathrm{E}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}$, das ergibt insgesamt $2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 3-2\cdot 2\cdot 3+1=205$ Maschinenzahlen, also $\mu = 3^{-8} = 1.5242\cdot 10^{-4}$, $M = (3-3^{-1})\cdot 3^8 = 3^9-3^7 = 17496$. Die Maschinengenauigkeit ist $1/2\cdot 3^{-1} = 1/6$.

Aufgabe P3. Es ist $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$, also $(0.5)_{10} = (0.\overline{1})_3$. Damit ist im angegebenen Rechner $(0.5)_{10} \approx (1.1\mathrm{E}-01)_3 = ((1+1/3)3^{-1})_{10} = (1/3+1/9)_{10}$. Der Fehler ist also $\varepsilon = (1/2-1/3-1/9)_{10} = (1/18)_{10} = (0.0\overline{5})_{10}$ und der relative Fehler ist $\varepsilon_{rel} = (1/9)_{10}$. In diesem Beispiel wäre $(1.2\mathrm{E}-01)_3$ eine weitere Darstellung von 0.5 mit den betragsmäßig gleichen Fehlern.

Aufgabe 1. Um die Binärdarstellung zu finden, subtrahiere man immer die größte Zweierpotenz, so daß die Differenz nicht negativ wird: $1/3-1/4=1/12, 1/12-1/16=1/48, 1/48-1/64=1/192$, etc., also ist $1/3 = 2^{-2}+2^{-4}+2^{-6}+\cdots = (0.\overline{01})_2$, $1/5-1/8=3/40, 3/40-1/16=1/80, 1/80-1/128=3/640, 3/640-1/256=1/1280$, etc. also ist $1/5 = 2^{-3}+2^{-4}+2^{-7}+2^{-8}+\cdots = (0.\overline{0011})_2$. Nach dem gleichen Muster, aber etwas mühsamer erhält man $1/7 = (0.\overline{001})_2$. Insgesamt

x	$(rd(x))_2$	$(rd(x))_{10}$	$\varepsilon(x)$	$\varepsilon_{rel}(x)$
1/3	$1.01\mathrm{E}-010$	0.3125	0.0208	0.06250
1/5	$1.10\mathrm{E}-011$	0.1875	0.0125	0.06250
1/7	$1.01\mathrm{E}-011$	0.15625	-0.0134	-0.09375

Aufgabe 2.

(a) Maschinengenauigkeit $= 0.5\cdot 2^{1-48} = 2^{-48} = 3.553\cdot 10^{-15}$.

(b) Die erste (positive) Maschinenzahl ist $1.0\ldots 00\mathrm{E}-1\ldots 1$, die zweite Maschinenzahl ist $1.0\ldots 01\mathrm{E}-1\ldots 1$, die tausendste ist dann $((1111100111)_2 = (999)_{10})$

$$1.000000000\,0000000000\,0000000000\,0000000011\,11100111\mathrm{E}\text{-}11\,1111111111,$$

in Dezimalform $(1+2^{-38}+2^{-39}+\cdots)2^{-4095} = 2^{-4095}+2^{-4133}+2^{-4134}+\cdots \approx 5.2\cdot 10^{-1232}$.