Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 25: (vorletzter Bogen) Übungen am 7. Juli 1998

Abgabetermin: am 14. Juli 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 25: Trigonometrische Polynome als Lösung des $\mathrm{L}_2[0,2\pi]$-Approximationsproblems. Neuer Abschnitt über Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen. Motivation: Differentialgleichung des Eulerschen Knickstabs, der schwingende Saite, diskretisierte Versionen davon, Spektrum $\sigma(\mathbf{A})$, charakteristisches Polynom, Eigenraum (zu einem Eigenwert, zu einer Matrix), ähnliche Matrizen, Ähnlichkeitstransformation, diagonalähnliche Matrizen, normale Matrizen, Eigenwerte und -vektoren einer Diagonalmatrix, algebraische, geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts, Rayleigh-Quotient, Satz von Schur

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P73. Wiederholen Sie die Diskretisierung der Differentialgleichung $y'' = -k^2 y$ mit den Randwerten $y(0)=0, y(l)=0$ (Saite) oder $y'(l)=0$ (Knickstab), $l>0$ gegeben.

Aufgabe P74. (a) Wiederholen Sie die oben in der Zusammenfassung angegebenen Begriffe, (b) sind Matrizen mit gleichen Eigenwerten ähnlich?

Aufgabe P75. (a) Finden Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. (b) Ist $\mathbf{A}$ normal?

Hausaufgaben: Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix gleicher Größe. Die Einträge von $\mathbf{A}$ seien a_{jk}, $j,k = 1,2,\ldots,n$. Unter $\overline{}$ verstehen wir den Übergang zum konjugiert Komplexen. Entsprechend ist $\mathbf{A}^* := (\overline{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}}$. Mit $p_{\mathbf{A}}$, definiert durch $p_{\mathbf{A}}(z) := \det(\mathbf{A} - z\mathbf{I})$, $z \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$. Schreiben wir es in die Form

$$p_{\mathbf{A}}(z) = (-z)^n + a_{n-1}(-z)^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{25.1}$$

so ergibt sich aus dem Entwicklungssatz für Determinanten, daß jeder Koeffizient a_{n-j} eine Summe ist von Produkten aus Matrixelementen, wobei jedes Produkt aus genau j Faktoren besteht, $j = 1,2,\ldots,n$. Beispielsweise ist $a_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, die *Spur* von $\mathbf{A}$. Ist $\mathbf{x}$ ein (Zeilen- oder Spalten-) Vektor, so ist $\operatorname{diag}(\mathbf{x})$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\mathbf{x}$.

Aufgabe 49. Beweisen Sie die folgenden Sätze:

1. $\det \mathbf{A}^* = \overline{\det \mathbf{A}}$,
2. $p_{\mathbf{A}} = (-z)^n + a_{n-1}(-z)^{n-1} + \cdots + a_0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{\mathbf{A}^*} = (-z)^n + \overline{a_{n-1}}(-z)^{n-1} + \cdots + \overline{a_0}$,
3. $\sigma(\mathbf{A}^*) = \overline{\sigma(\mathbf{A})}$,

4a. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$,
4b. $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathbf{A}) \subset \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ (y-Achse),
4c. $\mathbf{A} = \mathrm{i}\,\mathbf{A}^* \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathbf{A}) \subset (1+\mathrm{i})\mathbb{R}$ (Diagonale $x=y$).
Hinweis: Fassen Sie die drei Fälle zu $\mathbf{A} = c\mathbf{A}^*$ mit $|c| = 1$ zusammen und betrachten Sie den Rayleigh-Quotienten. [1.–3. je 0.5 Punkte, 4. insgesamt 2.5 Punkte]

Aufgabe 50. (Fortsetzung)

5. (Kennzeichnung normaler Matrizen) Es existiert eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q}$ (also $\mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = \mathbf{I}$) mit $\mathbf{Q}^*\mathbf{A}\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$. Hinweis: Zum Beweis von $\Leftarrow$ verwenden Sie den Schurschen Satz.
6. $\mathbf{A} = c\mathbf{A}^*$ mit $|c| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}$ ist normal.
7. Finden Sie alle 2×2-Matrizen mit $\mathbf{A} = \mathrm{i}\,\mathbf{A}^*$.
[5. drei Punkte, 6.–7. je 0.5 Punkte]