Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer | WS 1997/1998 (1. Teil) | SS 1998 (2. Teil)

Bogen 19: Übungen am 19. Mai 1998

Abgabetermin: am 26. Mai 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 19: Darstellung des cg-Verfahrens als polynomiales Verfahren, Erklärung des vorzeitigen Abbruchs; lineare Optimierung, Ernährungsplan, graphische Methode, Definition von Basisvektoren

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P55. (a) Könnte das cg-Verfahren auch funktionieren, wenn die zugrunde liegende Matrix symmetrisch, aber nicht positiv definit ist? (b) Wie ist es bei beliebiger Matrix?

Aufgabe P56. (a) Formulieren Sie den Ernährungsplan noch einmal. (b) Machen Sie ein lineares Optimierungsmodell für das folgende Problem: m Zuckerfabriken benötigen Zuckerrüben, die an n verschiedenen Stellen gelagert werden. Die Zuckerfabrik j hat einen Bedarf von z_j Tonnen Zuckerrüben, jedes einzelne Lager k hat eine Kapazität von l_k Tonnen. Wir nehmen $\sum z_j = \sum l_k$ an. Der Abstand zwischen Fabrik j und Lager k betrage c_{jk}. Die Transportkosten seien proportional zu diesen Entfernungen. Wieviel Zuckerrüben muß die Fabrik j vom Lager k beziehen, damit die Transportkosten insgesamt minimal sind.

Aufgabe P57. Was sind Basisvektoren? Diskutieren Sie diese Frage am Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Hausaufgaben:

Aufgabe 37. Man formuliere das Verfahren der konjugierten Richtungen als Pascal- oder matlab-Programm mit den Formeln (5.53)–(5.58), Buch, S. 148. Zum Testen benutze man wieder das Modellproblem 5.26, Buch, S. 151 für $n = 10$ und für $n = 33$ zur Erreichung einer Genauigkeit von 10^{-10}, gemessen durch die maximale Komponente des Residuums. Man gebe als Lösung in beiden Fällen die Zahl der Iterationsschritte an und die Größe des dann erreichten Residuums.
Hinweis: Da es zweckmäßig ist, den unbekannten Vektor $\mathbf{x}$ (und entsprechend auch die anderen Vektoren wie Residuum $\mathbf{r}$ und Richtung $\mathbf{h}$) als Matrix $\mathbf{x}(j,k)$, $j,k = 0,\ldots,n$ zu formulieren, braucht man drei Hilfsprogramme (matlab-Formulierung):
`r=residuum(x), z=Amalh(h), s=skalarpr(x,y).`

- `r=residuum(x)`, berechnet das Residuum $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$,
- `z=Amalh(h)`, $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{h}$,
- `s=skalarpr(x,y)`, $s = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$. In matlab kann man die formale Matrix $\mathbf{x}$ mit dem Befehl `reshape` bequem in einen Vektor umformen und dann das gewöhnliche Skalarprodukt bilden.

Aufgabe 38. Man finde alle Basisvektoren des 3×5-Systems

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \text{mit}$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 12 & 2 & -6 \\ -17 & -11 & 0 & -2 & 22 \\ 1 & 12 & 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind also alle zulässigen Vektoren $\mathbf{x}$ mit den dazugehörenden Indexmengen $I = \{j_1, j_2, j_3\}$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq 5$, so daß das quadratische Teilsystem $(\mathbf{a}^{j_1}, \mathbf{a}^{j_2}, \mathbf{a}^{j_3})\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nicht singulär ist und die Lösung $\mathbf{x}$ hat. Dabei bezeichnet $\mathbf{a}^j$ die j-te Spalte von $\mathbf{A}$, $1 \leq j \leq 5$. Wieviele Basisvektoren kann es maximal geben?