Numerische Mathematik für StudentInnen mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer | WS 1997/1998 (1. Teil) | SS 1998 (2. Teil)

Bogen 17: Übungen am 5. Mai 1998

Abgabetermin: am 12. Mai 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 17: keine Vorlesung wg. 1. Mai

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P49. Lösen Sie ein 2×2-System mit dem GSV- und dem ESV-Verfahren und starten Sie in jedem Fall mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Wofür stehen die Abkürzungen GSV und ESV? Benutzen Sie zum Rechnen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist in jedem Fall $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (1, 1)$. Bei welcher Matrix ist mit Konvergenz zu rechnen?

Aufgabe P50. Prüfen Sie an obigen Fällen die Gültigkeit der Konvergenzbedingung

$$\varrho := \max\{|\frac{a_{12}}{a_{11}}|, |\frac{a_{21}}{a_{22}}|\} < 1.$$

Aufgabe P51. Wir machen uns mit einem Minimierungsverfahren vertraut. Sei dazu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir suchen $\hat{\mathbf{x}}$ mit $f(\hat{\mathbf{x}}) \le f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben dafür auch $\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$ und sagen, f hat bei $\hat{\mathbf{x}}$ ein *globales Minimum*. Die Größe $\hat{\mathbf{x}}$ selbst nennen wir *globale Minimalstelle* von f. Unter einer *Richtung* verstehen wir einen beliebigen Vektor $\mathbf{h} \ne \mathbf{0}$. Ausgehend von einer Richtung $\mathbf{h}_0$ und einem beliebigen *Startvektor* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g_0(\alpha) := f(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{h}_0)$. Sei $\alpha_0 := \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}} g_0(\alpha)$ vorhanden. Dann setzen wir $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \alpha_0 \mathbf{h}_0$ und können das Verfahren mit einer neuen Richtung $\mathbf{h}_1$ und einem analogen g_1 wiederholen. Das *Minimierungsverfahren* besteht darin, das gegebene Optimierungsproblem wie angegeben in eine Folge von eindimensionalen Minimierungsproblemen aufzuspalten. Wenn die eindimensionalen Probleme alle eindeutig lösbar sind, hängt das Verfahren nur ab von $\mathbf{x}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \ldots$ Probieren Sie das Verfahren aus an $x^2 + y^2 = \min$, $x_0 = 1, y_0 = 1, \mathbf{h}_0^{\mathrm{T}} = (1, 0)$, $\mathbf{h}_1^{\mathrm{T}} = (0, 1)$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 33. Sei S ein auf $[a, b]$ definierter, interpolierender, kubischer Spline, der die gegebenen Daten (t_j, S_j), $j = 0, 1, \ldots, n$ verbindet. Dabei ist $a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le b$.
(i) Man stelle das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, das Formel (3.68), Buch, S. 60 entspricht auf. Die fehlenden zwei Bedingungen ersetze man alternativ durch
(a) $s_0 := S'(t_0) = S'_0, \quad s_n := S'(t_n) = S'_n, \quad S'_0, S'_n$ bekannt,
(b) $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$,
(c) $S(a) = S_a, \quad S(b) = S_b$ falls $a < t_0, t_n < b$ und gegebenen S_a, S_b.
(ii) Ist $\mathbf{x}$ die Lösung, wie wird dann der Spline S dargestellt?
(iii) Welche besondere Form hat die Matrix $\mathbf{A}$?
Hinweis: Die obige Matrix $\mathbf{A}$ wird in der Projektaufgabe 2 zur Herstellung des globalen kubischen Splines `Spline4global` gebraucht. Nehmen Sie die bekannten Ableitungen (a) als Randbedingungen, und lösen Sie das Gleichungssystem für die Projektaufgabe 2 mit der Zerlegung (5.19), Buch, S. 134.

Aufgabe 34. Testen Sie das SOR-Verfahren mit einem Pascal- oder matlab-Programm am Beispiel 5.26, Buch, S. 151 und stellen Sie in etwa das optimale ω fest. Nehmen Sie als Randwerte $u_0(0, y) = u_0(1, y) = 1$; $u_0(x, 0) = u_0(x, 1) = 0$. Daß hier für die vier Ecken $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ von Q die Randwerte nicht eindeutig definiert sind, spielt keine Rolle, da diese Werte nie gebraucht werden. Wählen Sie $n = 10$ und $n = 33$. Hinweis: Es ist zweckmäßig, die angenäherte Lösung u_{jk} als Matrix $\mathbf{U}$ darzustellen mit $j, k = 0, 1, \ldots, n$ und $u_{0k}, u_{nk}, u_{j0}, u_{jn}$ mit den gegebenen Randwerten vorzubesetzen. Starten Sie die Iteration immer mit $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$, und rechnen Sie, bis das Residuum in allen Komponenten dem Betrage nach unterhalb von 10^{-4} liegt, und zählen Sie die Anzahl der dazu benötigten Iterationen. Iterieren Sie aber in keinem Fall mehr als 100-mal ($n = 10$), bzw. 200-mal ($n = 33$). Hinweis: Speichern Sie in keinem Fall die Matrix $\mathbf{A}$. Ohne Wertung: Zeichnen Sie die Lösung $\mathbf{U}$.