Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

Bogen 15: Übungen am 21. April 1998

Abgabetermin: am 28. April 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 15: Lineare Gleichungssysteme, Gauß-Elimination, LR-Zerlegung, Pivot-Strategien, bis S. 130 oben.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P43. Seien

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Lösen Sie } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren ohne Pivotsuche und speichern Sie die Einträge der linken Dreiecksmatrix L.

Aufgabe P44. Lösen Sie dasselbe Gleichungssystem mit Spaltenpivotsuche und mit totaler Pivotsuche.

Aufgabe P45. Wie lauten in allen drei Fällen die entsprechenden LR-Zerlegungen.

Hausaufgaben:

Aufgabe 29. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$. (i) (a) Wie kann man die Vertauschung der Zeilen j, k, (b) wie kann man die Vertauschung der Spalten j, k von $\mathbf{A}$ durch eine Matrixmultiplikation von $\mathbf{A}$ mit einer geeigneten Matrix $\mathbf{P}$ beschreiben. Man bestimme $\mathbf{P}$ und gebe die Art der Multiplikation von $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{A}$ an. (ii) Man behandele dasselbe Problem mit beliebigen Zeilen- oder Spaltenvertauschungen. Unter einer *Permutation* p von $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ versteht man eine bijektive Abbildung $p : M \to M$ von M auf sich selbst. Die klassische Notation dafür ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_m \end{pmatrix}$ mit $i_k \in M$ und $i_j \neq i_k$ für $j \neq k$ mit der Bedeutung $p(k) = i_k$. (a) Die Zeilen von $\mathbf{A}$ vertausche man so, daß in der k-ten Zeile die i_k-te Zeile von $\mathbf{A}$ steht, $k = 1, 2, \ldots, m$. Wie wird diese Vertauschung durch eine einzige Matrixmultiplikation beschrieben. (b) Dasselbe für Spaltenvertauschungen $k \to i_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. An dem folgenden Beispiel führe man die Vertauschungen vor. Sei $\mathbf{A} = (j + k - 1) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $1 \leq j \leq 3$, $1 \leq k \leq 4$. Man beschreibe die Zeilenvertauschungen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und die Spaltenvertauschungen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Man gebe also die Permutationsmatrizen und das entsprechende Matrixprodukt, das die Vertauschungen bewirkt an.

Aufgabe 30. Man schreibe ein Pascal-Programm zur Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ unter Benutzung einer Spaltenpivotsuche. Das Ergebnis muß auch die LR Zerlegung (der entsprechend permutierten Matrix) von $\mathbf{A}$ enthalten. Man schreibe zwei Varianten: Einmal vertausche man die entsprechenden Zeilen tatsächlich, bei der anderen Variante vertausche man nur die Indexnumeriering der Zeilen. Man teste das Programm an

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 48 \\ -300 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und finde die Lösung und die LR-Zerlegung von $\mathbf{A}$. Fällt etwas an der Rechengenauigkeit auf?